こんにちは、河見賢司です。

今回は相加相乗平均の証明問題を解いてもらいます。

こういった公式そのものを示す問題は意外によく大学受験に出題されます。まず、１番で公式自体を証明して、２番以降でその公式を使って問題を解いていくという問題もよく出題されます。

公式の証明は一般的に難しいものが多いので、証明法自体を覚えておかないと解けないということが多いです。相加相乗平均の証明も勘のいい人なら、まったくの未経験でも解けるかもしれませんが、ほとんどの人にとって、難しいと思います。これを機に相加相乗平均の証明法をしっかりと覚えていってください。

問題

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$ とする。次の不等式を証明せよ。

(1) $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$　　(2) $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$

(3) $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$

【解説（１）】

まずは (1) の証明からです。

証明問題の基本は例えば (左辺)≧(右辺) を証明するときは (左辺)−(右辺) を計算していき、その結果が 0 以上ということを使って証明します。0 以上の証明はおもに２通りの証明法があります (相加相乗平均やシュワルツの不等式を除く)。

まず一つ目は $(\quad)^2+(\quad)^2$ というふうに２乗足す２乗の形にする方法です。今回は $(\quad)^2+(\quad)^2$ と２乗を２つかきましたが、別に２つとは限りません。１個の時もあるし、２つのときもありますし、それ以上のときもあります。

この $(\quad)^2+(\quad)^2$ の方法で示すのは、当然２乗とするので２次式以上である必要があります (１次式だったら $(\quad)^2$ の形に式変形できないよね？）が、文字に範囲がないときに使うことが多いです。文字に範囲があるときは次に紹介する２つ目の解法を使うことが多いです。

文字に範囲があるときは、因数分解を使って証明することが多いです。

たとえば $a > 1, b > 1$ という範囲が与えられているとき $(a-1)(b-1)$ は左側の $a-1$ は $a > 1$っていう条件から $a-1 > 0$ が言え、同じように $b-1 > 0$ もいうことができます。$(a-1)(b-1)$ は正のものどうしをかけ合わせるので当然正となります。

条件に範囲が与えられている時も $(\quad)^2 + (\quad)^2$ の形で示すこともないことはないですが、ほとんどありません。

なぜかというと、「**数学は与えられた条件を１００パーセント使い切る**」という鉄則があります (原理的にいえば与えられて条件を使い切らなくて問題が解けたとしてもおかしくないのですが、そういった問題はほとんどない)。

もし仮に $(\quad)^2 + (\quad)^2$ の形で証明できるとしたら範囲が条件として与えられる必要がなくなるよね？(範囲がなくても $(\quad)^2 + (\quad)^2$ の形になったら 0 以上ということがいえる）だから、範囲が与えられているときの不等式の証明はほとんどの場合因数分解を使った解法になるということを覚えておいてください。

では、問題に進みます。$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ を証明するのですが、右辺に $\sqrt{\ }$ が入っているので少し考えにくいので両辺を 2 乗してから考えます。

両辺を 2 乗するのですが、**不等式の両辺を２乗する時は、両辺の符号を気にしないといけない**ということをしっかりと頭に叩き込んでおいてください。

不等式の両辺を何も考えずに 2 乗する人が多いけど、両辺が正だったら $1 < 2 \Rightarrow 1 < 4$ となり確かに成立するけど、$-2 < 1$ の両辺を 2 乗すると $4 < 1$ となりおかしくなるよね。数字だったら間違える人は少ないと思うけど、文字だったら忘れるという人が多いので不等式の両辺を 2 乗するときは、必ず正負を考えるというクセをつけるようにしておいてください。では、これらのことを踏まえ解答に進みます。

【(1) の解答】

$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ を示す。$a > 0, b > 0$ より、(左辺)> 0、(右辺)> 0 を考え

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqq (\sqrt{ab})^2$$ ◀ (両辺)> 0 より、両辺を 2 乗しても同値性は保たれる

$$\Leftrightarrow \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \geqq ab \cdots (*)$$

以下、$(*)$ を示す。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - ab \\
&= \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} - \frac{4ab}{4} \quad \blacktriangleleft \text{通分をした} \\
&= \frac{a^2 - 2ab + b^2}{4} \\
&= \frac{(a-b)^2}{4} \geqq 0
\end{aligned}
$$

等号成立は $a - b = 0$ つまり $a = b$ のとき $_{//}$

不等式の証明の答案のかき方は少しクセがあるので、先ほどの答案を使って少し解説していきます。

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqq (\sqrt{ab})^2 \quad \blacktriangleleft \text{(両辺)} > 0 \text{ より、両辺を 2 乗しても同値性は保たれる}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^2 + 2ab + b^2}{4} \geqq ab \cdots (*)$$

以下、$(*)$ を示す。

上記でなんか ⇔ という記号が出てきて変なことしているなと思った人もいると思います。

この ⇔ は同値変形ということです。

数学は常にこの同値性を意識して式変形をしていかないとダメなんですが、最初のうちは別にいいです。普段している式変形のほとんどはしっかりと同値変形ができています。

同値性については本当に重要なんですが、こんなことを言うとダメかもしれないんですが、通常の大学受験の問題で同値性を意識しないといけない問題は少ないです。

意識しないでも解けてしまいます。大学生のしかもある程度難関大学に合格している生徒でも、「同値変形 ?? 」という人が多いことが事実です。

ですから、ここでは「不等式の両辺が正の時は両辺を 2 乗しても同値性が保たれているんだな」とくらいに考えるようにしてください。

では、問題に戻ります。この問題は $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ を証明せよという問題ですが、この式のままでは証明が難しいので証明ができやすい形まで式変形をしました。$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ と $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4} \geqq ab$ は同値なので $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4} \geqq ab$ を示したら $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ を示したことになります。

なので $\dfrac{a^2+2ab+b^2}{4} \geqq ab \cdots (*)$ とおいて以下 $(*)$ を示すというふうにかきました。

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqq (\sqrt{ab})^2 \quad \blacktriangleleft \text{(両辺)} > 0 \text{ より、両辺を 2 乗しても同値性は保たれる}$$

$$\frac{a^2+2ab+b^2}{4} \geqq ab$$

上記のように $\Leftrightarrow$ の記号をかかない人もいます。これでも間違いとはされないと思いますが、証明問題ではちゃんと同値性を意識しましたよということを強調するためにも $\Leftrightarrow$ の記号をかいておいた方がいいと思います。

不等式の証明の最初の段階で、範囲のあるときは因数分解を使って示すことが多いと書きました。今回は $a>0,\ b>0$ という範囲があるのに因数分解を使っての証明ではなく $(\quad)^2$ の証明かよ、と思った人もいるかもしれませんが、今回は $\sqrt{ab}$ とありますが $\sqrt{\ }$ が存在するには $\sqrt{\ }$ の中身が正という条件が必要なのでそのために必要なんです。

範囲が与えられている時は因数分解を使って解く解法が多いですが、そうではない場合もあります。そのあたりは臨機応変に考えられるようにしておいてください。

では、次の (2) に進みます。

【(2) の解説】

この問題を解く前に、(1) で $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ を証明して、(2) で $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$ を証明するという問題で (3) が $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ を証明するという問題になっているけど、これって順番がおかしくない？

普通だったら、

(1) で $\dfrac{a+b}{2} \geqq ab$ の次の (2) は $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ で (3) で $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$ で示しなさいとなるはずだよね。

ここで、あれ？おかしいなと気づけるようになっておいて欲しいんです。受験問題のテクニックとして、当たり前だけど多くの人が知らないテクニックがあります。

受験でのテクニック

受験問題で (1)、(2)、(3) となっているとき、前問の結果を利用したり、ヒントにして解いていくことが多い。

特に、以下の時に注意すること。
① 前問と次の問題の形が似ているとき
② 前問が受験問題として出題されるにはあまりに簡単なとき

上記は本当に重要だから覚えておいてください。今回は上記のふたつのパターンに当てはまるわけではないですが、順番がおかしいので、「あれ？」と気づけるようにしておいてほしんです。

もし、普通どおり解くのなら順番通りでるはずです。順番通りでないということは、ここで前問の結果を使えってことなのかな？と勘繰れるようになってください。

もちろん、こうなったからと言って必ず前問の結果を使って解くわけではありません。あくまで可能性があるということです。

数学の問題でもちろん解き方が分かる問題もありますが、解き方が分からない時は解ける可能性のある方法を全てしらみつぶしに解いていきます。そして、いろいろとやっているうちに解答にたどりつけるのです。解ける可能性のある解法をしらみつぶしに考えるということを覚えておいてください。簡単な問題では一発で分かると思いますが、難しい受験問題になるとこの考えは役に立ちますよ。

それでは、問題に戻ります。今回の問題も前問の結果を使って解いていくのですが、どうしようかな？

二つの式を見比べてみると $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ と $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$ だけど $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ の a を $\dfrac{a+b}{2}$ に、b を $\dfrac{c+d}{2}$ に置き換えたら (置き換えるとは代入をすると考えてもらってかまいません)

とりあえず左辺は

$$\frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \blacktriangleleft a \text{ に } a=\frac{a+b}{2} \text{ を } b \text{ に } \frac{c+d}{2} \text{ を代入した } = \frac{a+b+c+d}{4}$$

(1) の $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ を使って (2) の $\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$ を証明するんだけど、これでうまくいくかどうかは分からないけど、左辺がそろったからなんとなく解けそうじゃない？

(注)「なんとなく解けそうじゃない？」なんてあいまいな言葉を使いました。この問題はこの解法で解くわけなんですが、しっかりとした根拠があるわけじゃないんです (左辺をそろえたところで解けるという根拠はないよね)。

このプリントの中でも何回か言っているけど、数学を解く上で根拠がなくてもとりあえず解けそうな解法はすべて試すといことが重要です。

左辺をそろえたからといって必ず解けるとは限らないけど、同じ形になったらなんとかできそうな気もする。

それから、証明問題で特に多いんですが、前問の結果を使って解いていく時、文字の置き換えを使って左辺か右辺を強引に同じ形にして示していくというパターンが本当に多いです。このことも、あわせて覚えておいてください。

繰り返しになりますが、この解法で絶対解けるわけではありません。でも、うまく解ける可能性もあるので試してみる、そんな感じで考えています。

(注) a を $\dfrac{a+b}{2}$、b を $\dfrac{c+d}{2}$ に置き換えていいの？と思った人もいると思います。

これなんですけど、いいんです。なぜかというと (1) での a, b の条件は $a > 0, b > 0$ という条件でした。

a, b, c, d の条件は $a > 0, b > 0, c > 0, d > 0$ なんで、当然 $\dfrac{a+b}{2} > 0$ だし $\dfrac{c+d}{2} > 0$ が言えるよね。

(1) の $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ が成立する条件は a, b がともに正という条件が必要。つまり a と b にはともに正という条件さえ満たしていたらどんな数 (文字) が来ても OK です。

$\dfrac{a+b}{2}$ と $\dfrac{c+d}{2}$ は両方とも正という条件を満たしているので当然 $a = \dfrac{a+b}{2}, b = \dfrac{c+d}{2}$ と置き換えても大丈夫です。少し難しいですが、しっかりと理解しておいてください。

前問の結果を使って証明する問題で、今回の問題で使うようにとりあえず右辺か左辺を同じ形にしてから解いていくという手法もよく出てきます。覚えておいてください。

では、問題に戻りますね。

(1) の $\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ の a を $\frac{a+b}{2}$ に置き換えて、b を $\frac{c+d}{2}$ に置き換えたら

$\frac{a+b}{2} \geqq ab \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt{\frac{a+b}{2}\frac{c+d}{2}}$ となります。

ここで、左辺はもうOKなので右辺を考えていかないといけないんだけど、どうしようかな？とりあえず右辺だけを書き出してみます。

$\sqrt{\frac{a+b}{2}\frac{c+d}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)(c+d)}$ となります。ここから $\sqrt[4]{abcd}$ という形にしないといけないんだけど、４乗根ってことはルートのなかにさらにルートがあったらいいんだよね？

$\sqrt{(a+b)(c+d)}$ はそれぞれもう一度相加相乗平均を使うと $a+b \geqq 2\sqrt{ab},\ c+d \geqq 2\sqrt{cd}$ だからルートの中にルートが出てくれるんじゃない？

$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geqq \sqrt{2\sqrt{ab}\,2\sqrt{cd}} = 2\sqrt{\sqrt{abcd}} = 2\sqrt[4]{abcd}$

「こんな式変形思いつかないよ」と思った人もいると思います。確かに難しいですね。ポイントとしてはルートの中にルートが出てくるには？それくらいしかヒントがありません。

ですから、「これで思いついてね」と言うしかないんです。今回は、相加相乗平均の証明でしたがこういった公式として使っているものを証明せよって意外に難しいんです。

座標が分かっている時の三角形の面積の公式は $S = \frac{1}{2}|ad - bc|$ があったと思いますが、これなんかも導くのは意外に難しんです。公式って導くのが面倒だから公式として与えられていることが多いんです。もし、簡単に導けるのなら、問題を解いていて公式が必要になったら、その場で導いたらいいだけのことですから。

公式っていうのは簡単に導けないから公式として与えられているんです。だから、一般的に公式の証明は面倒だということを覚えておいてください。

でも、公式の証明って大学受験では頻出なんです。ですから、公式は覚えるだけでなく導けるようになっておいた方がいいです。さきほども言いましたが、公式は導くのが難しいので、証明法自体を覚えてしまうしかありません。

今回の相加相乗平均の証明も難しかったと思います。よほど、勘のいい人しか思いつかない解法だとは思います。

「こんな解法思いつかないよ」と嘆くのではなく、何度か解きなおしてしっかりと導き方自体を覚えてください。それでは、解答に進みます。

【(2) の解答】

(1) の $\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ で a を $\dfrac{a+b}{2}$ に b を $\dfrac{c+d}{2}$ に置き換えると

$$\frac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geqq \sqrt{\frac{a+b}{2}\,\frac{c+d}{2}}$$ ◀ $a=\dfrac{a+b}{2}$ を $b=\dfrac{c+d}{2}$ を代入した

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c+d}{4} \geqq \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)(c+d)}$$

等号は $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{c+d}{2}$ つまり $a+b=c+d$ のとき成立する。

⇑(1) の等号成立は $a=b$ のとき、今回は $a=\dfrac{a+b}{2}$、$b=\dfrac{c+d}{2}$ と置き換えたので当然等号成立も $\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{c+d}{2}$ のとき

ここで (1) より、$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab} \Leftrightarrow a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ であることより

$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ と $c+d \geqq \sqrt{cd}$ が言えるので、
$(a+b)(c+d) \geqq 4\sqrt{abcd}$ が成立する。等号成立は $a=b$ かつ $c=d$ のとき
⇑ $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ と $c+d \geqq \sqrt{cd}$ はすべての辺が正。両式とも左辺の方が右辺よりも大きいので、当然左辺同士掛け合わせたものは右辺同士掛け合わせたものより大きい。

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \frac{1}{2}\sqrt{(a+b)(c+d)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c+d}{4} \geqq \frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{abcd}}$$ ◀ $(a+b)(c+d) \geqq 4\sqrt{abcd}$ より

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c+d}{4} \geqq \frac{1}{2}2\sqrt{\sqrt{abcd}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

等号成立は $a+b=c+d$ かつ $a=b$ かつ $c=d$ つまり $a=b=c=d$ のときに成立する。//

$\Uparrow$ これまでの 2 つの等号成立条件 $a+b=c+d$ と $a=b$ かつ $c=d$ を合わせた

では、(3) に進みます。

【(3) の解説】

(3) は (2) の結果を使って解いていきます。これは $d=\dfrac{a+b+c}{3}$ と置き換えるとうまくいきます。(2) で $a=\dfrac{a+b}{2}$, $b=\dfrac{c+d}{2}$ は気づけた人もいると思うけど今回の $d=\dfrac{a+b+c}{3}$ は普通は思いつけないと思います。僕もはじめて見たときは、当然？思いつきませんでした (笑) そんなものです。

ですから、こういった問題は解き方をひとつずつ覚えていってください。それでは、解答に進みます。

【(3) の解答】

(4) より、$\dfrac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$ で $d=\dfrac{a+b+c}{3}$ で置き換えると

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqq \sqrt[4]{abcd}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geqq \sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3a+3b+3c+a+b+c}{12} \geqq \sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}}$$ ◀ $\dfrac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4}$ の分母分子を 3 倍した

$$\Leftrightarrow \frac{4(a+b+c)}{12} \geqq \sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[4]{abc\frac{a+b+c}{3}}$$

(両辺) >0 より、両辺を 4 乗すると

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geqq abc\frac{a+b+c}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geqq abc$$ ◀ 両辺を $\dfrac{a+b+c}{3}$ (>0) で割った

$$\Leftrightarrow \frac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$$ ◀ 両辺を $\dfrac{1}{3}$ 乗した。これで導けた！

等号成立は $a=b=c=\dfrac{a+b+c}{3}$ つまり $a=b=c$ のとき //

$\Uparrow$ 等号が成立するのは (2) より $a=b=c=d$ のとき、$d=\dfrac{a+b+c}{3}$ と置き換えたので、

当然 $a=b=c=\dfrac{a+b+c}{3}$ のとき等号成立

今回は誘導にのったのでこういった解答にしましたが、この問題には有名な別解があります。よく出てくるので覚えておいた方がいいと思います。別解も紹介したいのですが、その前に以下の補題を解いてみてください。

補問

$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geqq 0$ を証明せよ

【解説】

この問題、どうやって解いたらいいのかな？と思うけど、最初に不等式の証明法は主に２通りあって $(\quad)^2+(\quad)^2$ の形にして証明するか、因数分解を使って証明するかのどちらかが多い。そして、因数分解をする解法は、問題文の条件に文字の範囲が与えられている時って言ったのを覚えていますか。

このことを踏まえて今回の問題を解いていくんだけど、今回の問題は問題文に範囲が与えられていないのでどうやら前者の $(\quad)^2+(\quad)^2$ を使う解法を使うみたいだよね。

どうやったらできるのかな？と思うけど、これは $\dfrac{1}{2}$ 倍して解いていくんです。こんなのも普通は気づかないと思います。この問題も私は初見のとき、もちろん？気づけませんでした (笑) ←さっきとおんなじやん！

これも覚えるしかないのでしっかりと覚えておいてください。それから、今回の補題ですが、過去の入試問題で何十回も出ている有名問題です。そういった意味でもしっかりと理解しておいてください。それでは、解答に進みます。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \\
&= \frac{1}{2}(2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2cd) \\
&= \frac{1}{2}(a^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2-2ab-2bc-2ca) \\
&= \frac{1}{2}\left\{(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)\right\}
\end{aligned}
$$

$\Uparrow$ こんなの言われないとなかなか気づかないと思う。

目で追って成り立っているということを確認してください。

$$
= \frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\} \geqq 0
$$

$\Uparrow(\qquad)^2+(\qquad)^2$ の形になってくれた。今回は２乗が３つあるタイプ

等号は $a-b=b-c=c-a=0$ つまり $a=b=c$ のとき、成立する。//

最初は「$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geqq 0$ を証明せよ」って言われてもどうやってするのかな？と思ったと思うけど、気づければ簡単だよね。何度も言いますが、解法はひとつずつ丁寧に覚えていくようにしてください。それでは、$\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ の別解に進みます。

どうやって示すかと言いうと、これは因数分解の公式を使います。

因数分解の公式

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

この公式は、３文字の対称式でよく使う公式です。と言っても出題頻度がそれほど高くないので忘れている人も多いと思います。もし忘れていたという人は、しっかりと覚えておいてください。

それでは、別解の解答に進みます。

【(3) の別解の解答】

$A>0,\ B>0,\ C>0$ とする。

$A^3+B^3+C^3-3ABC=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$ が言える。

ここで、$A>0,\ B>0,\ C>0$ より $A+B+C>0$ が言える。

また、$A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA=\dfrac{1}{2}\left\{(A-B)^2+(B-C)^2+(C-D)^2\right\} \geqq 0$ より、

$(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA) \geqq 0$ が言えるので、
$A^3+B^3+C^3-3ABC=(A+B+C)(A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA)$ を考え、

$A^3+B^3+C^3-3ABC \geqq 0$ つまり $A^3+B^3+C^3 \geqq 3ABC$ が成立する。

ここで、$A^3=a,\ B^3=b,\ C^3=c$ とおくと

$A^3 + B^3 + C^3 \geqq 3ABC \Leftrightarrow a + b + c > 3\sqrt[3]{abc} \Leftrightarrow \dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ が言える。

等号成立は $A = B = C$ つまり $a = b = c$ のとき //

今回はあと1問、不等式の証明に関する問題を解いてもらいたいと思います。不等式の証明の仕方を解説しましたが、その内容が理解できていると簡単だと思います。

問題

次数 a, b, c は、$-1 < a < 1, -1 < b < 1, -1 < c < 1$ を満たしている。このとき以下の不等式を証明せよ。

(1) $ab + 1 > a + b$　　(2) $abc + 1 > ac + b$

(3) $abc + 2 > a + b + c$

【(1) の解説】

不等式の証明は、２乗を使って示す方法と因数分解を使って示す方法の２通りありますが、今回は、$-1 < a < 1, -1 < b < 1$ と範囲が与えられているし、証明しする式が１次式である (２乗の形にできない) ことを考えると、まず間違いなく因数分解を使って証明するんだろうな、ということを問題を見た瞬間に気づけるようになって欲しいです。それでは、解答に進みます。

【(1) の解答】

$ab + 1 > a + b$ を示す。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= ab + 1 - (a + b) \\
&= ab + 1 - a - b \\
&= (b - 1)a - (b - 1) \\
&= (a - 1)(b - 1)
\end{aligned}
$$

◀ 因数分解した形になった！

ここで、$-1 < a < 1$ より $a - 1 < 0$ また $-1 < b < 1$ より $b - 1 < 0$ を考え、

$(a - 1)(b - 1) > 0$ ◀ マイナス同士を掛け合わせたものは当然正となる となる。

よって、$ab + 1 > a + b$ が成立する。//

【(2) の解説】

もうこの問題はどうするか気づいてほしんだけど、今回は (1) の $ab+1>a+b$ と (2) の $abc+1>ac+b$ は似ているよね。だから、この問題は (1) の結果を使って解いていきます。

どう解こうかな？と思うんだけど (1) の a を ac に置き換えたら問題は終了じゃない？

$-1<a<1,\ -1<c<1$っていう条件より $-1<ac<1$ となります。

(1) の a は $-1<a<1$ を満たす実数だったら何でもいいです。ac も $-1<ac<1$ を満たす実数なので当然 (1) の a を ac に置き換えても OK です。

【(2) の解答】

$-1<a<1,\ -1<c<1$ より $-1<ac<1$ となる。

(1) の $ab+1>a+b$ より、a を ac に置き換えると

$$
\begin{aligned}
& ab+1>a+b \\
\Leftrightarrow\ & (ac)b+1>(ac)+b \quad \blacktriangleleft\ a \text{ に } ac \text{ を代入したと考える} \\
\Leftrightarrow\ & abc+1>ac+b
\end{aligned}
$$

よって、$abc+1>ac+b$ が成立する。//

【(3) の解説】

これも (2) が $abc+1>ac+b$ で (3) が $abc+2>a+b+c$ なんだから、(2) と (3) は形が似ているよね？だから (2) を利用して解いていきます。

(2) の $abc+1>ac+b$ を使って、(3) の $abc+2>a+b+c$ を証明するんだけどどうしようかな？先ほど解いた相加相乗平均の証明でとりあえず右辺か左辺をそろえるって言ったのは覚えている？

今回も (2) の $abc+1>ac+b$ の左辺に +1 をすると、とりあえず証明したい式の (3) の $abc+2>a+b+c$ 左辺と一緒になってくれるよね？とりあえず、このことを手掛かりに解いていきます。

(2) の両辺に 1 を加えると $abc+2>ac+b+1$ となります。ここから (3) の $abc+2>a+b+c$ を示したいんだけど、どうしたらいいか分かるかな。

仮に、$ac+b+1>a+b+c$ が成り立っていたら、$abc+2>ac+b+1$ かつ $ac+b+1>a+b+c$ が成り立っていることになるからこのふたつの式をあわせて $abc+2>ac+b+1>a+b+c$ となるよね。

ここから真ん中の $ac+b+1$ をとったら $abc+2>a+b+c$ が言えたことになるんじゃない？この手法は、不等式の証明では本当によく使う手法だから、しっかりと理解しておいてください。

不等式の証明のテクニック

$A>B$ が成立していることが分かっている。

ここから $A>C$ を示したい。その時は、$B>C$ を示すことが多い。

では、これを使って解答に進みます。

【(3) の解答】

(2) より

$abc+1>ac+b$

$\Leftrightarrow abc+2>ac+b+1\cdots①$ ◀ 両辺に +1 をした

また

$ac+b+1-(a+b+c)$ ◀ $ac+b+1>a+b+c$ が成立することを示したい

$=ac+b+1-a-b-c$

$=ac+1-a-c$

$=(c-1)a-(c-1)$

$=(a-1)(c-1)>0\ (\because a-1<0,\ b-1<0)$

$\Uparrow -1<a<1,\ -1<b<1$ より当然 $a-1<0,\ b-1<0$ が言える

よって $ac+b+1>a+b+c\cdots②$

①, ② より、$abc+2>a+b+c$ が成立する。//

今回はこれで終了です。たった２、３問でしたが覚えることが多く大変だったと思います。今回は解説をかなり詳しく書きました。数学のできる人にとっては当たり前の内容

ばかりなのでかなりまわりくどく感じた人もいるかもしれませんが、苦手な人にとっては「こういうふうに考えるんだ」と思った人も少なくないと思います。

数学は、なぜここでこういうふうに考えたのかということを常に意識することが重要です。意識するかしないかで同じ勉強量でも理解度がかなり違ってきま。このプリントだけでなく、他の問題を解くときもそいういうふうなことを意識して解くようにしてください。それでは、がんばってください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com