３次関数の対称性について

こんにちは、河見賢司です。今日は３次関数の対称性について話したいと思います。

２次関数は軸について対称ということは知っている人が多いと思いますが、３次関数も対称性があります。普段高校生に教えていてほとんどの人が知らないので解説することにしました。

ほとんどの人が知らないと言いましたが、３次関数は大学受験では頻出で今回話すことは受験界では常識と言ってもいいくらい有名です。知らない人が多いというだけで、内容としてはごくごく簡単なものなので毛嫌いせずにぜひともこのプリントで勉強してもらえたら嬉しいです。

さっそくですが、次のことを覚えてください。

３次関数のグラフ対称性 (その１)

３次関数のグラフは変曲点について点対称である。

変曲点という、言葉を知らない人が多いと思います。詳しくは数学 III で勉強すると思うのでここでは言葉だけを簡単に説明します。

数学 II の微分のところで $f'(x) > 0$ の範囲では増加関数。$f'(x) < 0$ の範囲では減少関数。また、減少から増加、あるいは増加から減少と増減が変わるところを極値である、ということは勉強したと思います。これと似たような感じなんですが、次のことが言えます。

$f''(x) > 0$ の範囲では下に凸な関数、$f''(x) < 0$ の範囲では上に凸な関数。下に凸な関数から上に凸な関数に、または上に凸な関数から下に凸な関数に変わる点のことを変曲点という、ということを覚えておいてください。

詳しくは数学 III で勉強をするので、数学 II の範囲 (３次関数) では変曲点とは $f''(x) = 0$ となる地点と思ってもらってかまいません。

極値を求める時に $f'(x) = 0$ で極値を求めたよね。それと同じような感じです。

また $f''(x)$ とは、２階微分といって $f(x)$ を x で微分したら $f'(x)$ になったと思うけど、$f'(x)$ をさらに微分したものを $f''(x)$ と表記します。

難しく考えずに、３次関数は２階微分した $f''(x) = 0$ について対称になるんだなと覚え

るようにしてください。少し適当な表現ですが、数学 II の問題を解くにあたってはこのくらいで十分です。

で、３次関数の変曲点が具体的にどうなるかですが、
３次関数の一般形 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ のときの変曲点を求めていきたいと思います。

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \blacktriangleleft \text{ １階微分をした}$$
$$f''(x)=6ax+2b \blacktriangleleft \text{ ２階微分をした}$$

変曲点は $f''(x)=0$ となる地点のことだから、$6ax+2b=0$ つまり $x=-\dfrac{b}{3a}$ です。

３次関数は変曲点 $\left(-\dfrac{b}{3a},\ f(-\dfrac{b}{3a})\right)$ について点対称となります。

たまに３次関数は $\left(-\dfrac{b}{3a},\ f(-\dfrac{b}{3a})\right)$ について点対称と覚えている人もいますが、これでは忘れやすいので変曲点について点対称としたほうが忘れにくいと思います。

証明なんですが、本来の数学の意味から考えたらしっかりと示した上で使うということが理想なんでしょうけど、数学嫌いの人にとってはそれが難しいんですよね。

定理や公式の証明は本当に重要だとは思いますが、証明自体が必要になるのはごく一部の難関大学だけです。

僕も受験生の頃は、はっきり言って証明をできない定理や公式を使っていました。「数学のできる人」からはおしかりを受けるかもしれませんが、証明抜きでも定理や公式をあてはめるだけで、ほぼすべての大学受験の問題は解けてしまいます。

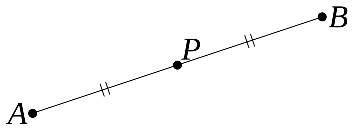
ですから、まずは定理、公式を意味は分からなくてもとりあえずあてはめて解いていくという解法で十分だと思います。

と、言うのも定理、公式は一般形 (文字を含んだ形) で表されているから、定理、公式の証明は一般的に難しいんです。数学の好きな人だったらいいんですけど、そうでない人は最初からこんなのを示していたら拒絶反応を示してしまいます。

定理、公式を暗記して、問題を数題解いてある程度慣れてきたら、その時に定理、公式の証明を理解する、そういった順番の方がベストに思えます。

ですから、定理、公式の証明は「嫌だ」と言う人は読み飛ばしてもらってかまいません。
それでは、３次関数がなぜ変曲点について点対称になるか証明したいと思います。

３次関数の証明に進む前に、まずは点対称の話をします。

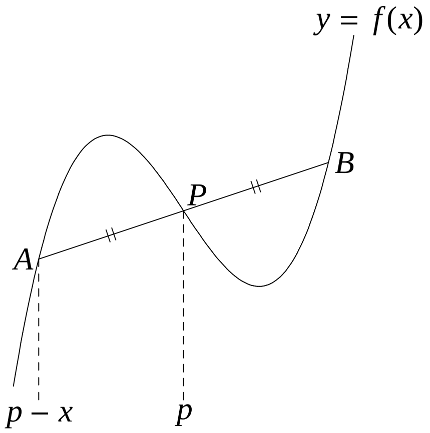


上図で P について、A と点対称な点は B になります。つまり点対称とは P 点を中心に A を 180° 回転させたときにうつる点のことです。

次に点対称である図形がどんな式をみたすかについて説明します。下図は点 P について点対称な図形であるとします。

例えば $y = f(x)$ 上の任意点 ($y = f(x)$ 上にあったらどこでもいい) を A とします。$y = f(x)$ が点 P について点対称な図形であるとき、A の点 P に対する点対称な点 B も $y = f(x)$ 上にあるんじゃない？

このことから、どういうことが言えるかというと、「$y = f(x)$ が点 P について点対称なとき、$y = f(x)$ 上の任意点 A の点対称な点 B も $y = f(x)$ 上である」ということが言えます。



さっきも少し話したけど、$y = f(x)$ が点 P について点対称な図形であるとき $y = f(x)$ 上の任意点 A の点 P に対する点対称な点 B が $y = f(x)$ 上にあるんだよね。

x を任意の実数とします。$A(p-x,\ f(p-x)),\ P(p,\ f(p))$ とします。B は $\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}}$ を満た

す点になります。⇐ 点対称は 180° 回転させたら等しくなる点、ということは A から P を見たときと、P から B を見たときは同じになるよね。だから、$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{BP}}$ となる

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (p - x,\ f(p - x))$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = (p,\ f(p))$

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OB}} &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AP}} \quad \blacktriangleleft\ \overrightarrow{\mathrm{AP}} = \overrightarrow{\mathrm{PB}}\text{ より} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) \\
&= -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{OP}} \\
&= -(p - x,\ f(p - x)) + 2(p,\ f(p)) \\
&= (-p + x + 2p,\ -f(p - x) + 2f(p)) \\
&= (p + x,\ 2f(p) - f(p - x)) \quad \blacktriangleleft\ B\text{ の座標が求まった！}
\end{aligned}
$$

今回はベクトルを使って点 B の座標を求めましたが、P は B の中点であるということを利用して求めてもらってもいいですよ。ベクトルは苦手な人が多いので、あえてベクトルで求めてみました

ここから $y = f(x)$ が点対称であるときは点 B が $y = f(x)$ 上にあったらいいんだよね？

点 $B\ (p + x,\ 2f(p) - f(p - x))$ が $y = f(x)$ 上にあるので

$$
\begin{aligned}
2f(p) - f(p - x) &= f(p + x) \\
2f(p) &= f(p + x) + f(p - x) \\
f(p) &= \frac{f(p - x) + f(p + x)}{2} \quad \blacktriangleleft\ \text{これが点対称であることの条件}
\end{aligned}
$$

一応まとめておきます。

$y = f(x)$ が点対称

$y = f(x)$ が点 $(p,\ f(p))$ について点対称なとき、任意の実数 x に対して

$f(p) = \dfrac{f(p + x) + f(p - x)}{2}$ が成立する。

これで点対称な図形の式を導くことができました。少し長かったですが、慣れてくると簡単に導くことができますよ。

それでは、このことを使って３次関数が変曲点について点対称であることを示していきますね。

$y=ax^3+bx^2+cx+d$ が変曲点 $\left(-\frac{b}{3a},\ f(-\frac{b}{3a})\right)$ について点対称であることを示せ。

【解答】

$y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ とする、これが $\left(-\frac{b}{3a},\ f(-\frac{b}{3a})\right)$ について点対称であるとき任意の実数 x について、

$f(p)=\dfrac{f(p+x)+f(p-x)}{2}$ が成立すればよい、ただし $p=-\dfrac{3a}{b}$

以下、これを示す。

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= f(p)\\
&= ap^3+bp^2+cp+d\\
&= a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3+b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2+c\left(-\frac{b}{3a}\right)x+d \quad \blacktriangleleft\ p=-\frac{b}{3a}\ \text{を代入した}\\
&= a\left(-\frac{b^3}{27a^3}\right)+b\frac{b^2}{9a^2}-c\frac{b}{3a}+d\\
&= -\frac{b^3}{27a^2}+\frac{b^3}{9a^2}-\frac{bc}{3a}+d\\
&= \frac{2b^3}{27a^2}-\frac{bc}{3a}+d
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= \frac{f(p+x)+f(p-x)}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left\{a(p+x)^3+b(p+x)^2+c(p+x)+d+a(p-x)^3+b(p-x)^2+c(p-x)+d\right\}\\
&= \frac{1}{2}\Big\{a(p^3+3px^2+3p^2x+x^3)+b(p^2+2px+x^2)+c(p+x)+d\\
&\qquad +a(p^3-3px^2+3p^2x-x^3)+b(p^2-2px+x^2)+c(p-x)+d\Big\}\\
&= \frac{1}{2}(2ap^3+6apx^2+2bp^2+2bx^2+2cp+2d)\\
&= ap^3+3apx^2+bp^2+bx^2+cp+d\\
&= a\left(-\frac{b}{3a}\right)^3+3ax^2\left(-\frac{b}{3a}\right)+b\left(-\frac{b}{3a}\right)^2+bx^2+c\left(-\frac{b}{3a}\right)+d \quad \blacktriangleleft\ p=-\frac{b}{3a}\ \text{を代入した}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\text{右辺}) &= a\left(-\frac{b^3}{27a^3}\right) - bx^2 + b\frac{b^2}{9a^2} + bx^2 - \frac{bc}{3a} + d \\
&= -\frac{b^3}{27a^2} - bx^2 + \frac{b^3}{9a^2} + bx^2 - \frac{bc}{3a} + d \\
&= -\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^3}{9a^2} - \frac{bc}{3a} + d \\
&= \frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d = (\text{左辺})
\end{aligned}
$$

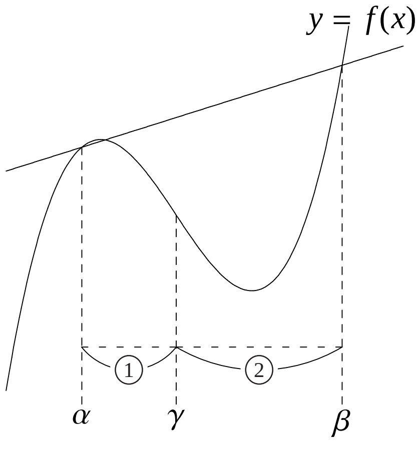
一応、これで３次関数が点対称であることの証明が終わりました。面倒だったよね？最初にも話しましたが、定理の証明って一般形で表されている ($y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ というふうに文字を含んでいる) 場合は、普通の数のときの計算よりも計算が面倒なんです。

いきなり、こんな計算しろって言われたら嫌になっちゃうよね。だから、証明は最初にするんじゃなくて、ある程度こういった問題を解いて慣れてきたところで証明にもチャレンジする、そんな感じでいいと思いますよ。

証明ができない人 (面倒なので飛ばした人) も、「３次関数は変曲点について点対称」ということだけは覚えておいてください。

次に３次関数の対称性 (その２) について、解説します。

３次関数の対称性 (その２)



上図のように $y = f(x)$ の接点の x 座標を α、接線との交点の x 座標を β とし、γ を変曲点の x 座標とする。

このとき、$\gamma - \alpha : \beta - \gamma = 1 : 2$ となる。

⇑接点がどこにあっても、距離の比は常に１: ２になります

【証明】

これも一応証明しておきます。証明法はぜひとも覚えてほしいのですが、少し難しいのでこれも理解できない人は別にいいです。とりあえず距離の比が 1 : 2 になるということだけ覚えておいてください。

3 次関数を $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とします。また接線を $g(x) = mx + n$ とおきます。

$f(x)$ と $g(x)$ の接点の x 座標が α、交点が β となることから、
$f(x) - g(x) = a(x-\alpha)^2(x-\beta)$ となります。

⇑ 例えば $x = \alpha, \beta$ を 2 解とする 2 次関数は $y = A(x-\alpha)(x-\beta)$ だよね？ここで A には何が入ってもいいんだけど、A と x^2 の係数は一致します。

$f(x) - g(x)$ は 3 次関数だよね？素直に $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ から $g(x) = mx + n$ を引いてみると、$f(x) - g(x) = ax^3 + bx^2 + (c-n)x + d - n$ となるので x^3 の係数が a の 3 次関数になるよね。

そして $f(x) = g(x)$ は $x = \alpha$ で接して、$x = \beta$ で交わる。

以上のことから $f(x) - g(x)$ は 3 次関数で x^3 の係数が a で $x = \alpha$ が重解で $x = \beta$ がもう一つの解。これらのことから $f(x) - g(x) = a(x-\alpha)^2(x-\beta)$ となります。

$$
\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= a(x-\alpha)^2(x-\beta) \\
&= a(x^2 - 2x\alpha + \alpha^2)(x-\beta) + g(x)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a(x^3 - 2\alpha x^2 + \alpha^2 x - \beta x^2 + 2\alpha\beta x - \alpha^2\beta) + mx + n \quad \blacktriangleleft \text{展開と } g(x) = mx + n \text{ を代入} \\
&= ax^3 - a(2\alpha + \beta)x^2 + (a\alpha^2 + 2a\alpha\beta + m)x - a\alpha^2\beta + n \cdots ①
\end{aligned}
$$

まだ変曲点の x 座標が γ という条件を使っていないので、次はこの条件を使います。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ax^3 + bx^2 + cx + d \\
f'(x) &= 3ax^2 + 2bx + c \\
f''(x) &= 6ax + 2b
\end{aligned}
$$

変曲点は 2 階微分が 0 になるところなので $f''(\gamma) = 6a\gamma + 2b = 0$ つまり $b = -3a\gamma$

この $b = -3a\gamma$ と ① の $f(x)$ の x^2 の係数とを比較すると、

$-3a\gamma = -a(2\alpha+\beta)$

$3\gamma = 2\alpha+\beta$ ◀ 両辺を $-a(\neq 0)$ で割った。３次関数なので当然 $a \neq 0$

$\gamma + 2\gamma = 2\alpha+\beta$

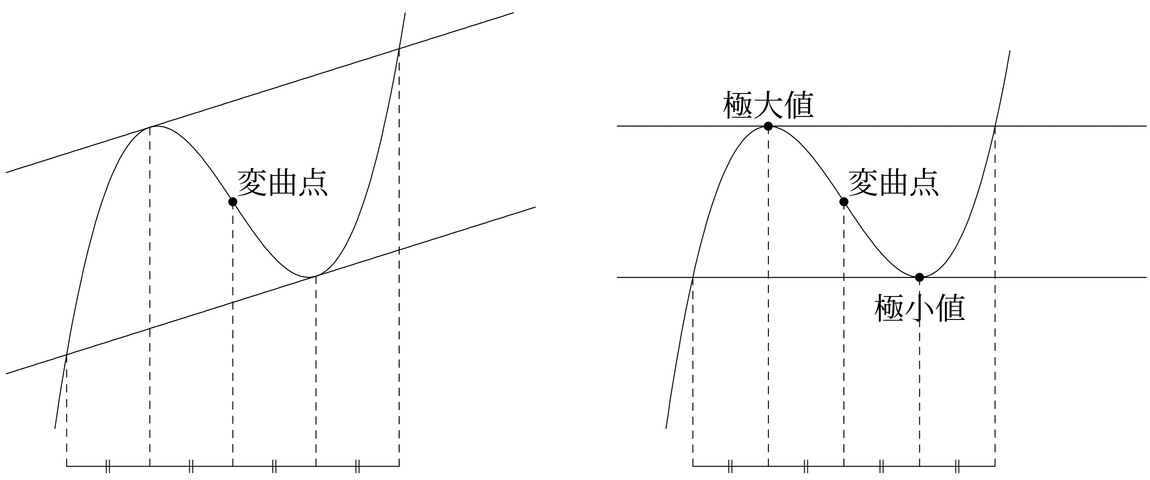
$2\gamma - 2\alpha = \beta - \gamma$

$2(\gamma-\alpha) = \beta-\gamma$

よって、$(\gamma-\alpha) : (\beta-\gamma) = 1 : 2$ となる。 ◀ これで証明終了

ここまで３次関数の対称性を２つほど話しましたが、この２つの性質より次のことがいえます。次のことを知って欲しいために、これまで長々と話してきました。

３次関数の対称性 (その３)



上記の性質右側の図は、左側の図の傾きを０にしただけの図なんですが、これって本当に重要なんです。

これまで長々と証明をしてきたので、少しイヤになっている人もいるとは思いますが、言いたかったのは上記の性質なんです。

この３次関数の性質だけは覚えておくようにしてください。それでは、この３次関数の対称性の性質を使う問題を１問解いてもらいます。

問題

$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 12$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最大値を求めよ。ただし $a \geqq 0$ とする。

【解説】

この問題はどういうふうに解いていくのかというと a の値の範囲によって最大値が変わってくるよね。

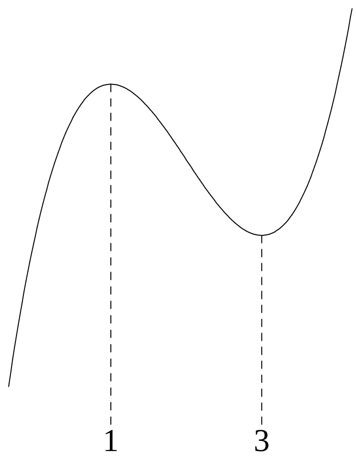
その前にとりあえずグラフが必要なので、微分をしてグラフをかいておきますね。

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 12$$

$$y' = 3x^2 - 12x + 9$$

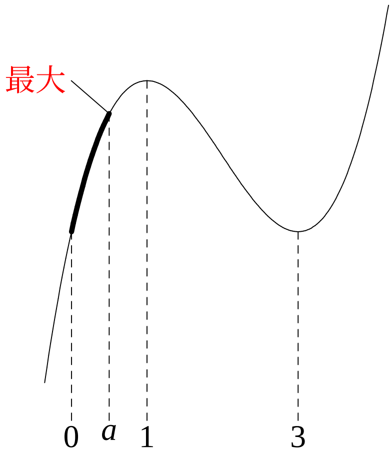
$$= 3(x-1)(x-3)$$

x		1		3	
y'	+	0	−	0	+
y	↗	16	↘	12	↗

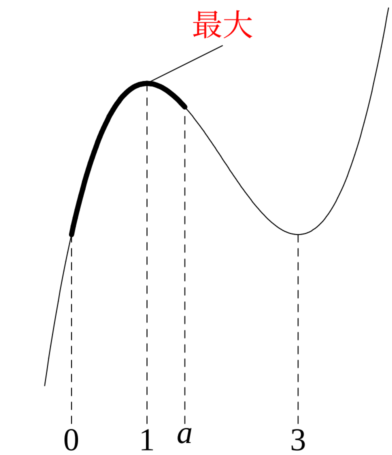


x, y 軸はあるとかえって見にくくなってしまうので、省略してかいてあります。次にこの最大値は a の値の範囲によって、場合分けが必要になってきます。

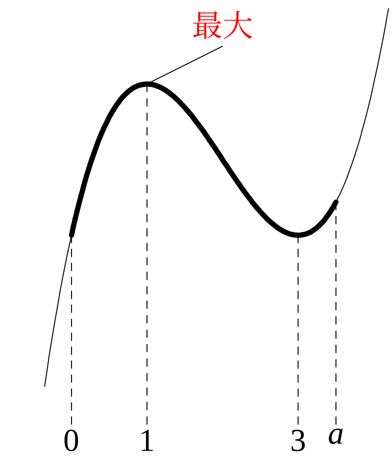
$0 \leqq x \leqq a$ の範囲で考えるんだけど、0 より大きい範囲で a の値を少しずつ大きくしていくと、まずは下図のようになります。この時最大値は $x = a$ のときだよね。



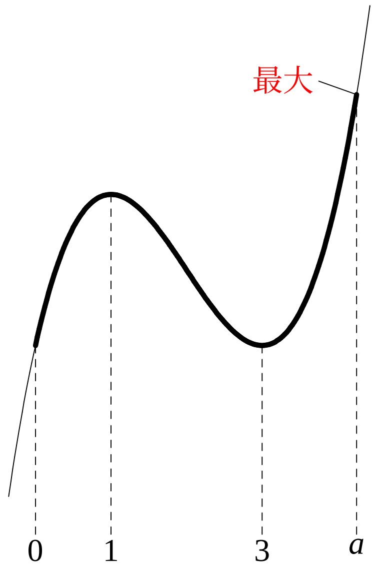
さらに a の値を大きくして、a の値が極大となる 1 を超えると下図のようになります。このとき $x = 1$ のときに最大となるよね。



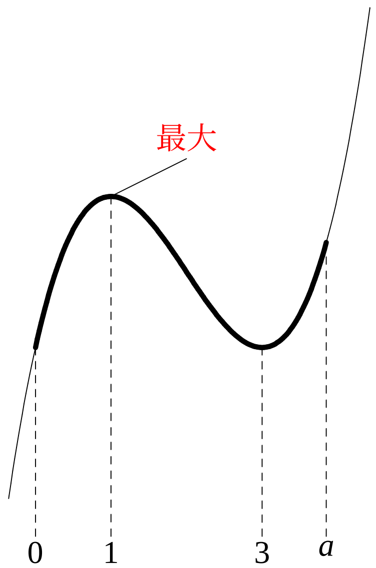
で、とりあえず a の値が 1 より大きいときは、しばらくは $x = 1$ のときが最大ということが続くよね？

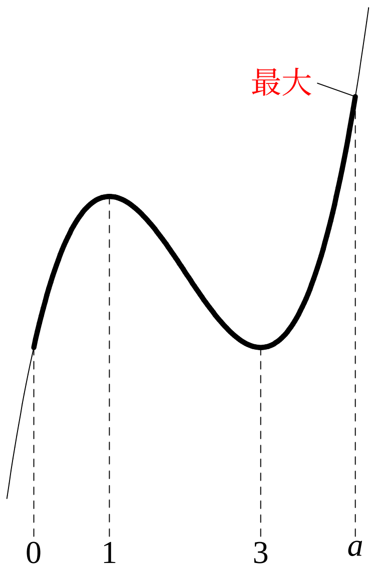


で、さらに a が大きくなると、グラフは以下のようになるので $x = a$ のとき最大になります。



この変わり目はどこかと言うと

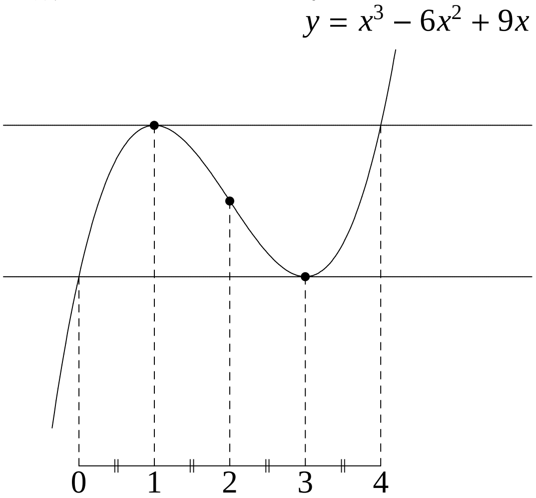




$f(a)$ の値が $f(1) = 16$ を超えるのはどこか本来なら計算で求めないといけない。$16 = f(x)$ つまり $16 = x^3 - 6x^2 + 9x + 12$ を解かないといけない、この方程式 3 次方程式だから結構面倒だよね。3 次方程式を解くには、組立除法を使わないといけないから、あまりしたくない。

それで、こういった問題で役に立つのが先ほど紹介した 3 次関数の対称性です。3 次関

数の対称性を使うと、グラフは次のようになります。これを使えば計算なんかしなくても解くことができます。



上図を見れば、変わり目が $x = 4$ だっていうことが分かりますよね。

このように３次関数の対称性を知っていれば３次方程式の計算を省略できるんです。今回は、三角関数の対称性を理解してもらうために、あえて問題は簡単 (計算が簡単) にしてあります。だから、この問題に関しては対称性を知らなくても、計算で解いても大したことないと思います。

ですが、本番の入試ではもっともっと複雑な計算がでてきます。そんなときは、今回解説をした３次関数の対称性が本当に有効になってきます。ぜひとも、理解しておいてください。それでは、問題の解答に進みます。少し間があいたので、もう一度問題をかいておきますね。

問題

$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 12$ の $0 \leqq x \leqq a$ における最大値を求めよ。ただし $a \geqq 0$ とする。

【解答】

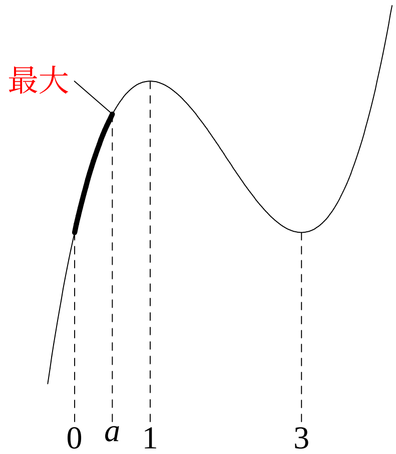
$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 12$

$= 3x^2 - 12x + 9$

$= 3(x - 1)(x - 3)$

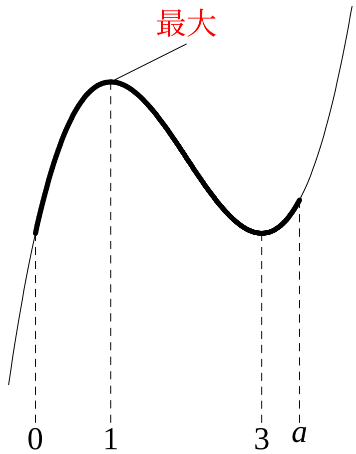
x		1		3	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	16	↘	12	↗

(i) $0 \leqq a \leqq 1$ のとき



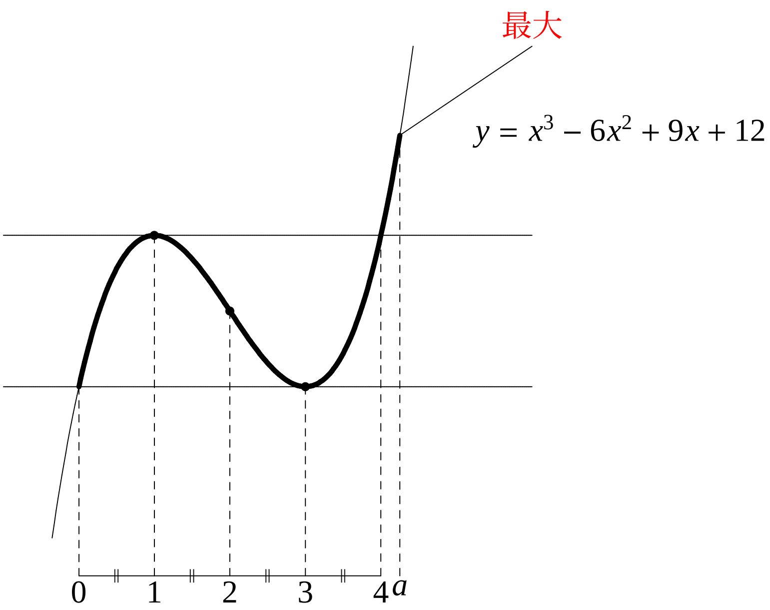
上図より、最大値は $x=a$ のとき、$a^3-6a^2+9a+12$ をとる。

(ii) $1<a \leqq 4$ のとき



上図より、最大値は $x=1$ のとき 16 をとる。

(iii) $4 \leqq a$ のとき



上図より、$x = a$ のとき最大値 $a^3 - 6a^2 + 9a + 12$ をとる。

それでは、これで今回の３次関数の対称性の話は終わりです。対称性なんですが、東大でさえこの対称性を知っていれば本当に簡単に解けてしまう問題を出題したことがあります。

と言って、難しい大学でしか出題されないのかといえば、そんなことはありません。今回のプリントは証明の部分は少しややこしかったかもしれませんが、問題自体は簡単だったと思います。３次関数の対称性をしっかりと覚えておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com