「桁数に関する問題」

こんにちは、河見賢司です。今回は対数の桁数に関する問題を解説します。

桁数の問題は、log をとって計算をしますが、桁数の問題でなぜ log をとるか理解していない人が多いです。

という僕も、高校生の頃は桁数の問題でなぜ log をとるか？でした。なぜか分からないけど解けるので、適当に解いていました (笑)。

しっかりと理解できていなくても簡単な問題だと解けるんです。でも、少し難しくなると解けなくなります。

このプリントではなぜそのようになるか説明したいと思います。決して難しい内容ではないので、このプリントでしっかりと理解してもらえば嬉しいです。

n 桁の自然数 x の満たす不等式

x が n 桁の自然数であるとき

$10^{n-1} \leqq x < 10^n$ を満たしている

いきなりこんなこと言われてもよく分かんないよね。そこで、なぜこうなるか説明します。

まずは、１桁のとき整数は 1 から 9 までだよね。だから、x が 1 桁のときは $1 \leqq x \leqq 9$ となります。

ここでなんだけど $10^{n-1} \leqq x < 10^n$ というふうに両辺とも $10^{○}$ で表されているので、$1 \leqq x \leqq 9 \Rightarrow 1 \leqq x < 10$ と変形します。

上記のように $1 \leqq x \leqq 9 \Rightarrow 1 \leqq x < 10$ と式変形できるのは理解できる？まず $10^{○}$ の形で表したい。

左辺の $1 = 10^0$ だからいいとして、右辺の 9 はこのままだと $10^{○}$ で表せないよね。だから、$x \leqq 9$ の 9 の部分を 10 にした。でも、これだと ≦ の = となることはなくなるから ≦ から = が消えて < にしました。

上記の説明がよく分かんないという人は日本語で覚えたらいいと思います。x が 1 以上 9 以下の自然数のとき、当然 x は 1 以上かつ 10 より小さい自然数だよね？

だから、$1 \leqq x < 10$ という不等式を満たしています。

cf 当たり前ですけど「以上」「以下」はそのものを含み、「より」は含みません。10 以上なら 10 も含みますが、10 より大きいは 10 を含みません

少し説明が長くなりましたが、x が１桁の自然数のとき $1 \leqq x < 10$ を $10^{○}$ で表すと $10^0 \leqq x < 10^1$ となります。

次は x が２桁の自然数のときです。２桁の自然数はさっきと同じように考えると 10 以上で 100 より小さい自然数だよね？だから、２桁のとき自然数 x は $10 \leqq x < 100$ を満たしています。これを $10^{○}$ の形で表すと $10^1 \leqq x < 10^2$ になります。

次に３桁の場合です。３桁のときは 100 以上かつ 1000 より小さい自然数だよね？だから、３桁のとき自然数 x は $100 \leqq x < 1000$ となり、$10^{○}$ の形で表すと $10^2 \leqq x < 10^3$ となります。

このくらいでなんとなく規則性が出てくると思うと思うけど

$n = 1$ のとき　$10^0 \leqq x < 10^1$

$n = 2$ のとき　$10^1 \leqq x < 10^2$

$n = 3$ のとき　$10^2 \leqq x < 10^3$

上記をみたら規則性が分かるよね。これで n 桁のとき、$10^{n-1} \leqq x < 10^n$ っていうのが分かるんじゃない？

まずは左側の 10 の指数に着目するけど、$n = 1$ のときは 0、$n = 2$ のときは 1、$n = 3$ のときは 2 ってなっているよね。左側の 10 の指数はすべて n よりひとつ小さくなっている。だから、n 桁のとき左側の 10 の指数は $n - 1$ ってなるんじゃない？

次に右側の 10 の指数を求めるけど、これは簡単だよね？$n = 1$ のときも、$n = 2$ のときも、$n = 3$ のときも右側の 10 の指数は左側の 10 の指数より 1 だけ大きくなっている。n 桁のとき左側の 10 の指数は $n - 1$ だから、$n - 1$ に 1 を加えて n になります。

以上より、n 桁の自然数 x は $10^{n-1} \leqq x < 10^n$ を満たします。

この式は何度も解いていれば暗記できるかもしれないけど、今回したように簡単に導けると思うので暗記する必要はないです。というのも、桁数と同じような形で小数の問題

があるからです。

ちなみに「小数第 n 位ではじめて 0 以外の数字が出てくる小数 x の満たす不等式は $10^{-n} \leqq x < 10^{-n+1}$」です。

見てもらえば分かるけど、これって今回の式の $10^{n-1} \leqq x < 10^n$ の式と似ているよね？暗記しているとどうしても混同しちゃって間違いやすいので、出題されるたびにその都度自分で導いた方がいいと思います。

桁数の問題はなぜ log をとるのかと言うと、ややこしい (文字を含んだ) 指数が式に含まれているからです。これは桁数に限ったことではないのですが、「**ややこしい (文字を含んだ) 指数が式に含まれている時は、両辺に指数をとる**」ということを覚えておいてください。

ちなみに $A = B$ の両辺に log をとると $\log_a A = \log_a B$ となります。このようにする式変形のことを log を取るといいます。

n 桁の自然数の満たす不等式は $10^{n-1} \leqq x < 10^n$ というふうに文字を含んだ指数を含んでいるので全ての辺に log をとります。

$10^{n-1} \leqq x < 10^n$

$\log_{10} 10^{n-1} \leqq \log_{10} x < \log_{10} 10^n$ ◀ 全ての辺に底が 10 の log をとった

$(n-1)\log_{10} 10 \leqq \log_{10} x < n\log_{10} 10$ ◀ log の公式 $\log_a A^n = n\log_a A$ を使った

$n-1 \leqq \log_{10} x < n$ ◀ $\log_{10} 10 = 1$ より

上記の $n-1 \leqq \log_{10} x < n$ を公式として覚えている人もいますが、これはよした方がいいです。log をとることによって簡単に導くことができますし、意味も分からずにこんな式を覚えていても忘れてしまっては点数をとれません。

では、桁数に関する問題を 1 問解いてもらいます。２００７年の新潟大学に出題された問題です。

問題

$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。このとき 15^{15} は何桁の整数であるか。

【解説】

これは先ほどの $10^{n-1} \leqq x < 10^n$ を使えばいいだけです。それでは解答に進みます。

【解答】

$15^{15}=x$ とする。x が n 桁の整数であるとき $10^{n-1} \leqq x < 10^n$ をみたす。

$10^{n-1} \leqq x < 10^n$

$\log_{10} 10^{n-1} \leqq \log_{10} x < \log_{10} 10^n$ ◀ 全ての辺に底が 10 の log をとった

$(n-1)\log_{10} 10 \leqq \log_{10} x < n\log_{10} 10$ ◀ log の公式 $\log_a A^n = n\log_a A$ を使った

$n-1 \leqq \log_{10} x < n$ ◀ $\log_{10} 10 = 1$ より

$x = 15^{15}$ を代入すると

$n-1 \leqq \log_{10} 15^{15} < n$

ここで

$$
\begin{aligned}
\log_{10} 15^{15} &= 15\log_{10} 15 \quad \blacktriangleleft\ \log_{10} A^n = n\log_{10} A \text{ の公式より} \\
&= 15\log_{10} 3\cdot 5 \\
&= 15(\log_{10} 3 + \log_{10} 5) \quad \blacktriangleleft\ \log_{10} AB = \log_{10} A + \log_{10} B \text{ の公式より} \\
&= 15\left(\log_{10} 3 + \log_{10} \frac{10}{2}\right) \quad \blacktriangleleft\ \text{(注) を見よ} \\
&= 15(\log_{10} 3 + \log_{10} 10 - \log_{10} 2) \quad \blacktriangleleft\ \log_{10} \frac{A}{B} \text{ の公式より } \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \text{ より} \\
&= 15(\log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2) \quad \blacktriangleleft\ \log_{10} 10 = 1 \text{ より} \\
&= 15(0.4771 + 1 - 0.3010) \quad \blacktriangleleft\ \log_{10} 3 = 0.4771 \text{ と } \log_{10} 2 = 0.3010 \text{ をそれぞれ代入した} \\
&= 17.6415
\end{aligned}
$$

$n-1 \leqq \log_{10} 15 < n \Leftrightarrow n-1 \leqq 17.6415 < n$ これを満たす整数 n は 18

⇑$n=18$ は間違いやすいから気をつけてください。$n-1 \leqq 17.6415 < n$ に $n=18$ を代入すると $17 \leqq 17.6415 < 18$ だからこの不等式は成立するよね。

$n=17$ なんかと間違って答える人が多いけど、$n=17$ のとき $n-1 \leqq 17.6415 < n$ に $n=17$ を代入すると $16 \leqq 17.6415 < 17$?? この不等式は成立しないよね。慣れてくると簡単だけど、慣れるまでは難しいので気をつけてください。

よって、15^{15} は１８桁の整数である。 ◀ これが答え

(注) について

$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2}$ の式変形なんか気づかないよと思った人もいると思います。確かに、なかなか気づきませんよね。でも、数値を与えられているのが $\log_{10} 2$ と $\log_{10} 3$ しかないので、この２つで表すしかありません。

これって気づける人は気づけるかもしれませんが、普通の人はなかなか難しいと思います。でも、桁数の問題でこの式変形は頻出なのでしっかりと覚えておいてください。

$\log_{10} 5$ の式変形

$\log_{10} 5$ は $\log_{10} \dfrac{10}{2}$ と変形をすると $\log_{10} 2$ のみであらわすことができる。

$$\begin{aligned} \log_{10} 5 &= \log_{10} \frac{10}{2} \\ &= \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \\ &= 1 - \log_{10} 2 \end{aligned}$$

◀ $\log_{10} 2$ のみで表せた！

今回のプリントはここまでです。桁数の問題は実際の大学受験でもたまに出題されます。

今回解説をした新潟大学の問題のように素直な形で出題されることは少ないです。実際の大学受験では、最高位の数字を求めたりするなどもう少しひねってくることが多いです。

ですが、今回の内容を理解しておけばすんなりと理解できると思います。難しい問題についてはまた後ほど解説したいと思います。まずは、今回解説した内容をしっかりと理解しておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com