「小数首位に関する問題」

こんにちは、河見賢司です。今回は「小数首位に関する問題」を解説します。

「小数首位に関する問題」と言っても分からない人もいると思いますが、例えば $\left(\frac{1}{3}\right)^{20}$ は小数第何位で初めて 0 以外の数が現れるかという問題です。

今日は、この問題を解説します。この問題は「桁数」の問題とほとんど同じように解くことができます。

桁数に関しては、以前解説しました。もし、桁数の問題に自信がないという人は以下のプリントを見てください。http://www.hmg-gen.com/tecni2b-8.pdf

では、今回の「小数首位に関する問題」の解説に進みます。突然ですが、次を覚えてください。

小数第 n 位に初めて 0 以外の数がくる小数のみたす不等式

x が小数第 n 位で初めて 0 以外の数がくる小数とする。このとき、x は

$10^{-n} \leqq x < 10^{-n+1}$ をみたす。

桁数のところでも話しましたが、これは暗記するのではなく以下のようにして自分で導くようにしておいてください。それほど出題頻度も高くないですし、桁数の公式と似ているので暗記してしまうとどうしても混同してしまい間違ってしまう可能性があります。簡単に確認できるので、出題されるたびに確認しながら自分で導くようにしてください。

ここから、どうやって導くかということを解説します。

まず、$n = 1$ のときです。$n = 1$ は小数第 1 位で初めて 0 以外の数が出てくる小数です。小数第 1 位で初めて 0 以外の数が出てくる小数の中で一番小さいのは、0.1 です。

仮に 0.1 より少しでも小さければ $0.0\cdots$ となるので小数第 1 位が 0 でないので条件を満たさなくなります。よって $0.1 \leqq x$ となります。

次に小数第 1 位で初めて 0 以外の数が表れる小数の中で一番大きいのは $0.99999\cdots$ です。当たり前なんですけど $0.99999\cdots < 1$ が言えるよね？このことから x は $x < 1$ という条件を満たします。

もともと求めた $0.1 \leqq x$ と合わせたら $0.1 \leqq x < 1$ となり。これを 10 の指数表記したら $10^{-1} \leqq x < 10^{0}$ となります。

(注) なんで 10 の指数表記するの？と質問されたことがあります。これは、公式が 10 の指数表記されているからです。公式は覚えなくてもいいと言いましたが、10 の指数表記にするんだなというところまでは覚えておくようにしてください。

$n = 1$ のとき $10^{-1} \leqq x < 10^{0}$ となりました。次に同じように $n = 2$ のときにどうなるのか確認していきます。

$n = 2$ のとき、小数第 2 位で初めて 0 以外の数が表れる少数だから、この中で一番小さいのは 0.01 です。

また一番大きいのは $0.0999\cdots$ です。$n = 1$ のときと同じように $0.0999\cdots < 0.1$ ということを考えて、$n = 2$ のとき、小数 x の満たす不等式は $0.01 \leqq x < 0.1$ となります。これを 10 の指数表記すると $10^{-2} \leqq x < 10^{-1}$ となります。

次に $n = 3$ のときも同じように考えていきます。小数第 3 位で初めて 0 以外の数が出てくる小数の中で一番小さいものは 0.001 で一番大きいものは $0.00999\cdots$ で、これまでと同じように考えて $0.00999\cdots < 0.01$ となります。よって $n = 3$ のとき、小数 x の満たす不等式は $0.001 \leqq x < 0.01$ となり、これを 10 の指数表記すると $10^{-3} \leqq x < 10^{-2}$ となります。

これまで $n = 1, 2, 3$ のときとやってきたけど、これでだいぶ規則性が見えてきたと思います。分かりやすいようにもう一度書いておきますね。

$n = 1$ のとき、$10^{-1} \leqq x < 10^{0}$

$n = 2$ のとき、$10^{-2} \leqq x < 10^{-1}$

$n = 3$ のとき、$10^{-3} \leqq x < 10^{-2}$

上記を見て、小数第 n 位のときどうなるか考えていきます。これまで $10^{\bigcirc} \leqq x < 10^{\bigcirc}$ となっているので、第 n 位のとき、左側の指数がどうなるか考えていきます。

左側の指数だけに着目すると
$n = 1$ のとき -1、$n = 2$ のとき -2、$n = 3$ のとき -3 となっています。これをもとに n のときどうなるのかな？と考えるんだけど、規則性より n のとき $-n$ ってなるよね。

これで左側の指数が分かったから、次に右側の指数を考えていくけど、右側の指数は左側の指数に比べていつも 1 つだけ大きくなっているんじゃない？今回左側の指数が $-n$ だったから、右側の指数は $-n+1$ になります。

よって、小数第 n 位で初めて 0 以外の数が現れる小数 x のみたす不等式は、$10^{-n} \leqq x < 10^{-n}$ となります。もう一度まとめておきます。

小数第 n 位に初めて 0 以外の数がくる小数のみたす不等式

> x が小数第 n 位で初めて 0 以外の数がくる小数とする。このとき、x は
>
> $10^{-n} \leqq x < 10^{-n+1}$ をみたす。

最初にも話したけど、上記は暗記するのではなく出題されるたびに今話したように考えて自分でその都度導くようにしてください。

参考書によっては、上記の公式でなく $-n \leqq \log_{10} x < -n+1$ としているものがあるけど、これは $10^{-n} \leqq x < 10^{-n+1}$ とまったく同じものだな、と気づけないとダメだよ。

どうやって導いているかと言うと、$10^{-n} \leqq x < 10^{-n+1}$ に底が 10 の log をとっただけです。log をとるというのは、例えば $A = B$ の式に底が a の log をとると $\log_a A = \log_a B$ となります。「log をとる」なんて変わった表現ですが覚えておいてください。

「なんで log をとることに気付いたの？」と思う人もいるかもしれませんが、次のことを覚えておいてください。

指数が文字式などのときの対処法

> 指数に文字式が含まれるなど、とにかくややこしい指数が含まれているときは log をとることが多い

「ややこしい指数」なんて少し適当な表現かもしれませんが、覚えておいてください。意外に重要な考え方ですよ。なぜ log をとるのかというと、log には $\log_a A^n = n \log_a A$ という公式があります。文字を含んだ指数が変数だと考えにくいですが、log をとることによって変数が前にいき係数になってくれて考えやすくなります。こういった理由で、ややこしい指数のときは log をとることが多いです。

$10^{-n} \leqq x < 10^{-n+1}$

$\log_{10} 10^{-n} \leqq \log_{10} x < \log_{10} 10^{-n+1}$ ◀ 両辺に底が 10 の log をとった

$-n\log_{10} 10 \leqq \log_{10} x < (-n+1)\log_{10} 10$ ◀ $\log_a A^n = n\log_a A$ の公式を使った

$-n \leqq \log_{10} x < -n+1$ ◀ $\log_{10} 10 = 1$ より

これで $10^{-n} \leqq x < 10^{-n+1}$ から $-n \leqq \log_{10} x < -n+1$ を導くことができました。何度も言うけど、これも覚える必要はないよ、最初話した方法で $10^{-n} \leqq x < 10^{-n+1}$ を導いてもらってそこから簡単に $-n \leqq \log_{10} n < -n+1$ を導けますから ⋯

では、このことを踏まえて次の問題を解いてみてください。これまでのことを適用するだけだからごくごく簡単だと思いますよ。

問題

次の数を小数で表した時、小数第何位で初めて 0 でない数字が現れるか。ただし、$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$　　(2) $\left(\frac{1}{15}\right)^{10}$

【(1) の解答】

$-n \leqq \log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} < -n+1 \cdots$ ① ◀ $-n \leqq \log_{10} x < -n+1$ に $x = \left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ を代入した

ここで、

$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$

$=50\log_{10}\frac{1}{2}$ ◀ $\log_a A^n = n\log_a A$ の公式を適用した

$=50(\log_{10} 1 - \log_{10} 2)$ ◀ $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$ の公式を適用した

$=50(0 - 0.3010)$ ◀ $\log_{10} 1 = 0$, $\log_{10} 2 = 0.3010$ を代入した

$= -15.05$

$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{50} = -15.05$ を ① に代入をいして、

$-n \leqq -15.05 < -n+1$ この不等式を満たす整数 n は $n = 16$ となる。

よって、$\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ は小数第 16 位で初めて 0 以外の数が現れる。

(注) $-n \leqq -15.05 < -n+1$ この式から $n = 16$ と求めるのは、意外に間違いやすいので気をつけてください。

$-n \leqq -15.05 < -n+1$ の式から判断するのではなく、まず -15.05 をとなりあった整数（連続する 2 つの整数）ではさむ不等式は $-16 < -15.05 < 15$ と作ってから、この左側の -16 が $-n$ と一致するんだなと思って考えたら間違いにくいと思います。

それでは、次に (2) に進みます。(2) を解くのに、$\log_{10} 5$ を $\log_{10} 2$ のみで表す式変形が必要になります。桁数のプリントでも解説しましたが重要なのでもう一度書いておきます。

$\log_{10} 5$ の式変形

$\log_{10} 5$ は $\log_{10} \dfrac{10}{2}$ と変形をすると $\log_{10} 2$ のみであらわすことができる。

$$\begin{aligned}\log_{10} 5 &= \log_{10} \frac{10}{2} \\ &= \log_{10} 10 - \log_{10} 2 \\ &= 1 - \log_{10} 2\end{aligned}$$

◀ $\log_{10} 2$ のみで表せた！

上記の式変形なんか知らなかったら普通思いつかないよね？こういった式変形は覚えていくしかないのでひとつずつ丁寧に覚えていってください。

それでは、(2) の解答に進みます。

【(2) の解答】

$-n \leqq \log_{10}\left(\dfrac{1}{15}\right)^{10} < -n+1 \cdots ①$ ◀ $-n \leqq \log_{10} x < -n+1$ に $x = \left(\dfrac{1}{15}\right)^{10}$ を代入した

ここで、

$\log_{10}\left(\dfrac{1}{15}\right)^{10}$

$=10\log_{10}\dfrac{1}{15}$ ◀ $\log_a A^n = n\log_a A$ の公式を適用した

$=10(\log_{10} 1 - \log_{10} 15)$ ◀ $\log_a \dfrac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$ の公式を適用した

$=10(0 - \log_{10} 3\cdot 5)$

$=-10\log_{10} 3\cdot 5$

$=-10(\log_{10} 3 + \log_{10} 5)$ ◀ $\log_a AB = \log_a A + \log_a B$ の公式を適用した

$=-10(\log_{10} 3 + 1 - \log_{10} 2)$ ◀ $\log_{10} 5 = \log_{10}\dfrac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - \log_{10} 2$ より

$=-10(0.4771 + 1 - 0.3010)$ ◀ $\log_{10} 3 = 0.4771,\ \log_{10} 2 = 0.3010$ をそれぞれ代入した

$=-11.761$

$\log_{10}\left(\dfrac{1}{15}\right)^{10} = -11.761$ を ① に代入すると

$-n \leqq -11.761 < -n+1$ この不等式を満たす整数 n は $n=12$ となる。

よって、$\left(\dfrac{1}{15}\right)^{10}$ は小数第 12 位で初めて 0 以外の数が現れる。

これで、今回の「小数首位に関する問題」の解説を終わりにします。桁数と考え方は同じなので桁数のところが理解できている人にとっては簡単だったと思います。

桁数や小数首位の問題は特に私立大学で出題されることが多いです。どの問題集にも載っていると思うので、今回のプリントで勉強した後演習を繰り返すようにしてください。それでは、がんばってください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com