こんにちは、河見賢司です。

今回は、面積を使った不等式の証明について話します。今回話す内容は、大学受験では頻出なのに解き方自体を知らない人が多い問題です。学校では、まともに教えてくれないというところも多いとです。

しっかりと勉強をしている人は、「典型問題だな」と思う人も多いと思いますが、「えっ、こんなの知らないよ」という人も多いと思います。

問題とその解答を見てもらえば分かると思いますが、この問題は知ってさえいればそれほど難しい問題ではありません。難関国公立大学の２次試験にも出てきますが、知っていれば３分以内で解けてしまうような問題です。そのくらい簡単な問題ですから、このプリントを通してしっかりと理解しておいてください。

問題

$x > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。

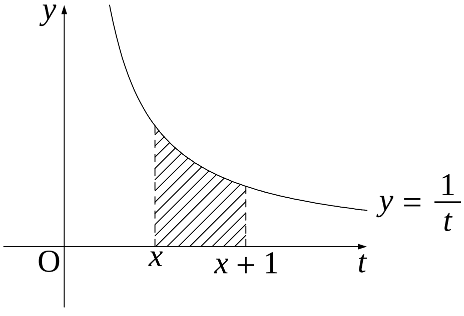
$$\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt < \frac{1}{x}$$

この問題を解いてみて、と言うとほとんどの人が $\int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt$ を計算して、

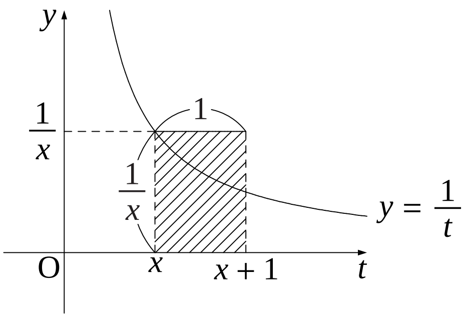
$\int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt$ を計算したら $\log(x+1) - \log x$ になるのですが、$f(x) = \log(x+1) - \log x - \frac{1}{x+1}$ とでもして微分をして証明をしようとします。

もちろんこれでもできないことないんですが、ここではもっと簡単な解法があります。それが面積に着目して解くという解法です。

$\int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt$ は、下図の面積を表しているっていうのは分かるよね？



次に、下の斜線部の面積は何を表しているか分かる？

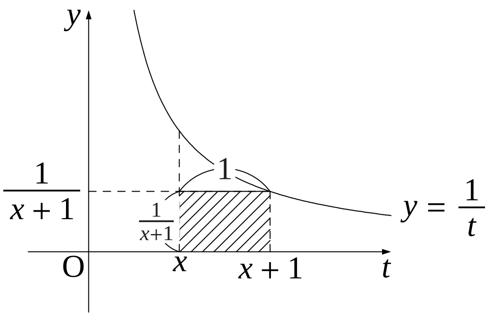


上図のように長方形の横の長さは 1 で縦の長さは $\dfrac{1}{x}$ になるよね。
ということは、この長方形の面積は $1 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x}$ じゃない？

これは当然 $\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt$ で表される部分の面積より大きいよね (図を見れば一目瞭然)。このことより、$\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt < \frac{1}{x}$ が証明できたことになります。

これと同じような作業をして、残りの $\dfrac{1}{x+1} < \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt$ の証明をします。

$\dfrac{1}{x+1}$ は下図の面積です。



上記の斜線部の面積は縦の長さが $\dfrac{1}{x+1}$ で横の長さが 1 の長方形なので、$1 \times \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{1}{x+1}$ となります。これは、当然 $\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dx$ の表す面積より小さくなるので $\dfrac{1}{x+1} < \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt$ が言えたことになります。

それでは、解答に進みます。

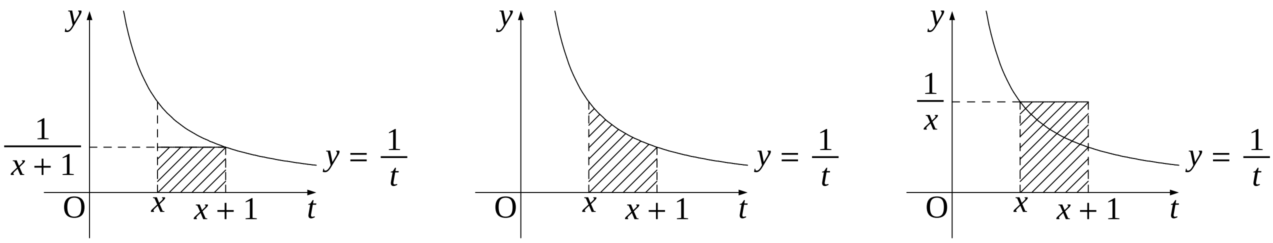
問題

$x > 0$ のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{x+1} < \int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt < \frac{1}{x}$$

【解答】

$\dfrac{1}{x+1},\ \displaystyle\int_x^{1+x} \frac{1}{t}\,dt,\ \dfrac{1}{x}$ は左から順に数の斜線部の面積を表している。



以上より、上図の面積より明らかに $\dfrac{1}{x+1} < \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt < \frac{1}{x}$ が成立する。

「どういった時にこの面積を使った証明法を使うんですか？」とたまに質問されます。この証明法を使うのは、積分区間の差が一定の時、特に積分区間の差が 1 になるときが多いです。

今回の問題でも、$\displaystyle\int_x^{x+1} \frac{1}{t}\,dt$ と積分区間が x から $x+1$ で、その差は 1 になります。こういうふうに不等式の証明で積分区間の差が一定のときは、面積を使った解法で解けるのでは？と考えられるようにしておいてください。

もちろん、積分区間が一定でなくてもこの解法を使うことがあります。そのあたりは臨機応変に考えられるようにしておいてください。

それから、関数の不等式の証明の問題で、例えば $f(x) < g(x)$ の証明をせよ、という問題なら $h(x) = g(x) - f(x)$ として微分を使って不等式の証明をしていくことが多いですが、今回のように $f(x) < g(x) < h(x)$ というように不等式によってはさまれている形の証明のときは、引き算をして微分をして証明をするということは少ないです。もちろん、ないというわけではありませんが、他に解法がある場合が多いのでこのことも覚えておいて

ください。

今回の問題は、分かりやすいように真ん中の式を $\int_{x}^{x+1}\frac{1}{t}\,dt$ の形にしましたが、ここは $\log(x+1)-\log x$ の形や少しひねって $\log(1+\frac{1}{x})$ や $\log\frac{x+1}{x}$ の形で出題されることが多いです。

最初のうちは気づきにくいかもしれませんが、この形を見れば $\log(x+1)-\log x=\int_{x}^{x+1}\frac{1}{t}\,dt$ に式変形できるのだな、と気づけるようにしておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値４５から５５！高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com