

問題 3

a, b, c, d, t は実数で, $a + d = t + t^{-1}$, $ad - bc = 1$, $t \neq 0, \pm 1$ とする。このとき, すべての自然数 n に対して

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} ap_n - p_{n-1} & bp_n \\ cp_n & dp_n - p_{n-1} \end{pmatrix}$$

となることを示せ。ただし, $p_0 = 0$, $p_n = \frac{t^n - t^{-n}}{t - t^{-1}}$ とする。

【解説】

まず、証明する式は自然数 n を含んだ式なので帰納法を使うのでは？と考えるようにしてください。行列に限らず、証明問題で自然数 n が含まれていれば、帰納法で示すことが多いので、まずは帰納法でうまくいくかどうか確認して、それでうまくいかなければ帰納法以外の解法を探すようにしてください。

帰納法は、 $A_k = B_k$ が成立している時、 $A_{k+1} = B_{k+1}$ を示さないといけません、これを示すには $A_k = B_k$ を式変形 (同値変形) していき、 $A_k = B_k$ を $A_{k+1} = B_{k+1}$ の式に変形していきます。

$A_k = B_k$ を同値変形していった結果 $A_{k+1} = B_{k+1}$ になったので、当然 $A_k = B_k$ と $A_{k+1} = B_{k+1}$ は同値。 $A_k = B_k$ が成立しているんだから、当然 $A_{k+1} = B_{k+1}$ も成立しているよね。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} ap_k - p_{k-1} & bp_k \\ cp_k & dp_k - p_{k-1} \end{pmatrix} \text{ が成立しているとき、} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} ap_{k+1} - p_k & bp_{k+1} \\ cp_{k+1} & dp_{k+1} - p_k \end{pmatrix}$$

$$\text{を示していかないとダメなんだけど、さっき話したように} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} ap_k - p_{k-1} & bp_k \\ cp_k & dp_k - p_{k-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{を同値変形していった結果、} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} ap_k - p_{k-1} & bp_k \\ cp_k & dp_k - p_{k-1} \end{pmatrix} \text{ が } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} ap_{k+1} - p_k & bp_{k+1} \\ cp_{k+1} & dp_{k+1} - p_k \end{pmatrix} \text{ になってくれたら証明終了です。}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} ap_k - p_{k-1} & bp_k \\ cp_k & dp_k - p_{k-1} \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ap_k - p_{k-1} & bp_k \\ cp_k & dp_k - p_{k-1} \end{pmatrix}$$

$$\uparrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} ap_k - p_{k-1} & bp_k \\ cp_k & dp_k - p_{k-1} \end{pmatrix} \text{ を式変形して } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} ap_{k+1} - p_k & bp_{k+1} \\ cp_{k+1} & dp_{k+1} - p_k \end{pmatrix}$$

$$\text{に持っていきたいが、左から} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ をかけると左辺は} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{k+1} \text{ になってくれて等}$$

しくなる。ということは、右辺の $\begin{pmatrix} ap_k - p_{k-1} & bp_k \\ cp_k & dp_k - p_{k-1} \end{pmatrix}$ に左から $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ をかけたとき $\begin{pmatrix} ap_{k+1} - p_k & bp_{k+1} \\ cp_{k+1} & dp_k - p_k \end{pmatrix}$ になってくれればOKです。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k &= \begin{pmatrix} ap_k - p_{k-1} & bp_k \\ cp_k & dp_k - p_{k-1} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ap_k - p_{k-1} & bp_k \\ cp_k & dp_k - p_{k-1} \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{k+1} &= \begin{pmatrix} a(ap_k - p_{k-1}) + bcp_k & adp_k + b(dp_k - p_{k-1}) \\ c(ap_k - p_{k-1}) + cdp_k & cdp_k - d(dp_k - p_{k-1}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

1行1列目を見ると $a(ap_k - p_{k-1}) + bcp_k$ となっているけど、これが $ap_{k+1} - p_k$ と等しくなってくれないとダメなんだよね。

証明するには、 p_{k+1} の関係式が必要なんだけど、ここから導くことができます。このところに気づけるかどうかが今回の問題のポイントです。かなり難しいと思うかもしれませんが、しっかりと理解しておくようにしてください。

$$\begin{aligned} &a(ap_k - p_{k-1}) + bcp_k \\ &= a^2p_k - ap_{k-1} + bcp_k \\ &= (a^2 + bc)p_k - ap_{k-1} \\ &= \{a^2 + (ad - 1)\}p_k - ap_{k-1} \quad \blacktriangleleft \text{ } ad - bc = 1 \text{ より } bc = ad - 1 \text{ を代入した (注) を見よ} \\ &= a^2p_k + adp_k - p_k - ap_{k-1} \\ &= a\{(a + d)p_k - p_{k-1}\} - p_k \end{aligned}$$

(注) 数学は文字が多ければ大変なので、文字数を減らすことができるときは、文字数を減らす方向で考えます。今回の問題では、 $a + d = t + t^{-1}$, $ad - bc = 1$ という条件が与えられているんだけど、 b, c に比べ a, d は $a + d = t + t^{-1}$ という条件が与えられているから何も条件が与えられていないよりは考えやすいよね。何の条件のない b, c が消えてくれた方がラクだからとりあえず $ad - bc = 1 \Rightarrow bc = ad - 1$ という条件式から bc を消去しました。これはよく出てくるから覚えておいてください。文字消去するときは、何も条件がないものを消去します。

$a(ap_k - p_{k-1}) + bcp_k = a\{(a + d)p_k - p_{k-1}\} - p_k$ が $ap_{k+1} - p_k$ と等しくなるので、比較して $p_{k+1} = (a + d)p_k - p_{k-1}$ と考えられます。

$p_{k+1} = (a+d)p_k - p_{k-1}$ が成立していないと、証明できません。

実際 $p_{k+1} = (a+d)p_k - p_{k-1}$ が成立していることを確認していきます。

$$\begin{aligned}
 & (a+d)p_k - p_{k-1} \\
 &= (a+d) \frac{t^k - t^{-k}}{t - t^{-1}} - \frac{t^{k-1} - t^{-(k-1)}}{t - t^{-1}} \quad \leftarrow p_n = \frac{t^n - t^{-n}}{t - t^{-1}} \text{ より} \\
 &= (t+t^{-1}) \frac{t^k - t^{-k}}{t - t^{-1}} - \frac{t^{k-1} - t^{-(k-1)}}{t - t^{-1}} \quad \leftarrow a+d = t+t^{-1} \text{ を代入した} \\
 &= \frac{1}{t+t^{-1}} \{(t+t^{-1})(t^k - t^{-k}) - (t^{k-1} - t^{-(k-1)})\} \\
 &= \frac{1}{t+t^{-1}} (t^{k+1} - t^{-k+1} + t^{k-1} - t^{-k-1} - t^{k-1} + t^{-k+1}) \\
 &= \frac{1}{t+t^{-1}} (t^{k+1} - t^{-k+1}) \\
 &= \frac{t^{k+1} - t^{-(k+1)}}{t - t^{-1}} \\
 &= p_{k+1} \quad \leftarrow p_n = \frac{t^n - t^{-n}}{t - t^{-1}} \text{ より } p_{k+1} = \frac{t^{(k+1)} - t^{-(k+1)}}{t - t^{-1}} \text{ となり、 } p_{k+1} = (a+d)p_k - p_{k-1} \text{ が示せた}
 \end{aligned}$$

長かったと思うけど、これで解説は終了です。この問題は少し難しいですが、入試問題ででてくる帰納法は難しいものと思ってください。なぜなら、簡単な帰納法なら誰でも解けてしまします。出題される時点で少し考えないと解けないものがほとんどです。それでは解答に進みます。

【解答】

$$p_0 = 0, p_1 = \frac{t^1 - t^{-1}}{t - t^{-1}} \text{ より } p_1 = \frac{t - t^{-1}}{t - t^{-1}} = 1$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} ap_n - p_{n-1} & bp_n \\ cp_n & dp_n - p_{n-1} \end{pmatrix} \text{ を示す。}$$

(i) $n = 1$ のとき

$$\begin{aligned}
 (\text{左辺}) &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & (\text{右辺}) &= \begin{pmatrix} ap_1 - p_0 & bp_1 \\ cp_1 & dp_1 - p_0 \end{pmatrix} \\
 & & &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (\because p_0 = 0, p_1 = 1)
 \end{aligned}$$

よって $n = 1$ のとき成立

(ii) $n = k$ のとき $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} ap_k - p_{k-1} & bp_k \\ cp_k & dp_k - p_{k-1} \end{pmatrix}$ が成立と仮定する。

ここで

$$\begin{aligned}
 & (a + d) p_k - p_{k-1} \\
 &= (a + d) \frac{t^k - t^{-k}}{t - t^{-1}} - \frac{t^{k-1} - t^{-(k-1)}}{t - t^{-1}} \quad \blacktriangleleft p_n = \frac{t^n - t^{-n}}{t - t^{-1}} \text{ より} \\
 &= (t + t^{-1}) \frac{t^k - t^{-k}}{t - t^{-1}} - \frac{t^{k-1} - t^{-(k-1)}}{t - t^{-1}} \quad \blacktriangleleft a + d = t + t^{-1} \text{ を代入した} \\
 &= \frac{1}{t + t^{-1}} \{ (t + t^{-1})(t^k - t^{-k}) - (t^{k-1} - t^{-(k-1)}) \} \\
 &= \frac{1}{t + t^{-1}} (t^{k+1} - t^{-k+1} + t^{k-1} - t^{-k-1} - t^{k-1} + t^{-k+1}) \\
 &= \frac{1}{t + t^{-1}} (t_{k+1} - t_{-k+1}) \\
 &= \frac{t^{k+1} - t^{-(k+1)}}{t - t^{-1}} \\
 &= p_{k+1}
 \end{aligned}$$

$$\therefore p_{k-1} = (a + d) p_k - p_{k+1}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} ap_k - p_{k-1} & bp_k \\ cp_k & dp_k - p_{k-1} \end{pmatrix} \\
 & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ap_k - p_{k-1} & bp_k \\ cp_k & dp_k - p_{k-1} \end{pmatrix} \\
 & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} a(ap_k - p_{k-1}) + bcp_k & adp_k + b(dp_k - p_{k-1}) \\ c(ap_k - p_{k-1}) + cdp_k & cdp_k - d(dp_k - p_{k-1}) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 & a(ap_k - p_{k-1}) + bcp_k \quad \blacktriangleleft \text{まずは 1 行 1 列目を示す} \\
 &= a^2 p_k - ap_{k-1} + bcp_k \\
 &= a^2 p_k - a \{ (a + d) p_k - p_{k+1} \} + (ad - 1) p_k \quad \blacktriangleleft p_{k-1} = (a + d) p_k - p_{k+1} \text{ , } bc = ad - 1 \text{ をそれぞれ代入した} \\
 &= a^2 p_k - a(a + d) p_k + ap_{k+1} + (ad - 1) p_k \\
 &= a^2 p_k - a^2 p_k - adp_k + ap_{k+1} + adp_k - p_k \\
 &= ap_{k+1} - p_k
 \end{aligned}$$

$$\text{よって } a(ap_k - p_{k-1}) + bcp_k = ap_{k+1} - p_k \cdots \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned}
& adp_k + b(dp_k - p_{k+1}) \quad \blacktriangleleft \text{1 行 2 列目を示す} \\
& = adp_k + bdp_k - bp_{k+1} \\
& = adp_k + bdp_k - b\{(a+d)p_k - p_{k+1}\} \quad \blacktriangleleft p_{k-1} = (a+d)p_k - p_{k+1} \text{ を代入した} \\
& = adp_k + bdp_k - b(a+d)p_k + bp_{k+1} \\
& = bp_{k+1} \\
& \text{よって } adp_k + b(dp_k - p_{k+1}) = bp_{k+1} \cdots \textcircled{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c(ap_k - p_{k-1}) + cdp_k \quad \blacktriangleleft \text{2 行 1 列目を示す} \\
& = acp_k - cp_{k-1} + cdp_k \\
& = acp_k - c\{(a+d)p_k - p_{k+1}\} + cdp_k \quad \blacktriangleleft p_{k-1} = (a+d)p_k - p_{k+1} \text{ を代入した} \\
& = acp_k - acp_k - cdp_k + cp_{k+1} + cdp_k \\
& = cp_{k+1} \\
& \text{よって } c(ap_k - p_{k-1}) + cdp_k = cp_{k+1} \cdots \textcircled{3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& bcp_k + d(dp_k - p_{k-1}) \quad \blacktriangleleft \text{2 行 2 列目を示す} \\
& = bcp_k + d^2p_k - dp_{k-1} \\
& = bcp_k + d^2p_k - d\{(a+d)p_k - p_{k+1}\} \quad \blacktriangleleft p_{k-1} = (a+d)p_k - p_{k+1} \text{ を代入した} \\
& = bcp_k + d^2p_k - d(a+d)p_k + dp_{k+1} \\
& = bcp_k + d^2p_k - adp_k - d^2p_k + dp_{k+1} \\
& = (bc - ad)p_k + dp_{k+1} \\
& = -(ad - bc)p_k + dp_{k+1} \\
& = -p_k + dp_{k+1} \quad \blacktriangleleft ad - bc = 1 \text{ を代入した} \\
& = dp_{k+1} - p_k
\end{aligned}$$

$$\text{よって } bcp_k + d(dp_k - p_{k-1}) = p_{k+1} - p_k \cdots \textcircled{4}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} ap_k - p_{k-1} & bp_k \\ cp_k & dp_k - p_{k-1} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ap_k - p_{k-1} & bp_k \\ cp_k & dp_k - p_{k-1} \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} a(ap_k - p_{k-1}) + bcp_k & adp_k + b(dp_k - p_{k-1}) \\ c(ap_k - p_{k-1}) + cdp_k & cdp_k - d(dp_k - p_{k-1}) \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} ap_{k+1} - p_k & bp_{k+1} \\ cp_{k+1} & dp_{k+1} - p_k \end{pmatrix} \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2}, \textcircled{3}, \textcircled{4})
\end{aligned}$$

よって $n = k + 1$ のときも成立する。

以上より、 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} ap_n - p_{n-1} & bp_n \\ cp_n & dp_n - p_{n-1} \end{pmatrix}$ はすべての自然数において成立する。

今回の問題はどうか？かなりがっちりした受験問題なので、難しく感じた人もいると思います。今回、この問題を紹介したのは、大学受験問題の解き方を覚えてほしいからです。今回の問題では、 $p_{k+1} = (a + d)p_k - p_{k-1}$ がポイントです。少し難しいとは思いますが、解けるようになっておいください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com