

「自宅で受けられる1対1の個別指導」の詳細は以下をクリック！

<http://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

2次関数No.3 「2次関数の決定」

こんにちは河見賢司です。今回は、2次関数の第3回。「2次関数の決定」に関する問題を解説します。

2次関数の決定は、おもに3通りあります。まずは、次のことを覚えてください。

2次関数の決定

- ① 頂点に関する何らかの情報が与えられているときは、 $y = a(x - p)^2 + q$ を使って解いていく。
- ② 通る点3点が与えられているときは、 $y = ax^2 + bx + c$ を使って解いていく。
- ③ $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ を通ると x 軸との2交点が与えられている問題では、 $y = a(x - \alpha)(x - \beta)$ を使って解いていく。

では、これを使って問題を解いていってもらいます。

問題

次の条件を満たす2次関数の方程式を求めよ。

- (1) 頂点が点 $(2, 3)$ で点 $(0, 1)$ を通る。
- (2) 2点 $(1, -8), (2, -2)$ を通り、 x 軸に接する。
- (3) 頂点の x 座標が1で、2点 $(-1, -5), (2, 1)$ を通る。
- (4) 放物線 $y = 3x^2$ を平行移動したもので頂点が $y = 2x + 1$ 上にあり、点 $(1, 3)$ を通る。
- (5) 3点 $(1, 4), (3, 6), (-2, 16)$ を通る。
- (6) 3点 $(4, 0), (1, 0), (0, -4)$ を通る。

【(1) の解説】

頂点が $(2, 3)$ と頂点に関する情報が与えられているので赤枠の①のパターンで、 $y = a(x -$

$p)^2 + q$ を使って解いていきます。今回は、頂点が点 $(2, 3)$ なので $y = a(x - 2)^2 + 3$ とおくことができます。

【(1) の解答】

頂点が点 $(2, 3)$ より。求める 2 次関数の方程式を $y = a(x - 2)^2 + 3$ とおく。

放物線 $y = a(x - 2)^2 + 3$ は点 $(0, 1)$ を通るので、

$$1 = a(0 - 2)^2 + 3$$

$$1 = 4a + 3$$

$$4a = -2$$

$$a = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3 \quad \blacktriangleleft \text{これが答え}$$

* 2 次関数の方程式は、答えは $y = ax^2 + bx + c$ または $y = a(x - p)^2 + q$ の形で表すことが多いですよ。今回の場合、 $y = -\frac{1}{2}(x - 2)^2 + 3$ です。わざわざ展開しなくてもいいです。このまま答えにしてく大丈夫です。

【(2) の解説】

今回の問題は、まず「 x 軸に接する」という表現に着目して下さい。 x 軸に接するという事は、頂点の y 座標が 0 ということです。

今回も頂点の情報が与えられているので赤枠の①のパターンです。頂点の y 座標が 0 なんだから頂点の座標を $(p, 0)$ とでもおくと、求める 2 次関数の方程式は $y = a(x - p)^2$ とすることができます。

問題を解くときに次のタイプの方程式を解くことになります。よく出る形なので覚えておいてください。

方程式の解法

$$\frac{B}{A} = \frac{D}{C} \Rightarrow BC = AD$$

$\frac{B}{A} = \frac{D}{C} \Rightarrow BC = AD$ は知らない人が多いですけど、意外によく出てくるので覚えておいてください。(分数) = (分数) の方程式が出てきたら利用するものと思ってください。証明は簡単にできますが、一応書いておきますね。

$$\frac{B}{A} = \frac{D}{C}$$

両辺に AC をかけると ◀ 分数は考えにくいので、分数を消すため

$$\frac{B}{A} \cdot AC = \frac{D}{C} \cdot AC$$

$BC = AD$ ◀ 証明終了！

以上のことを踏まえ問題を解いていきます。

【(2) の解答】

x 軸に接するので、求める 2 次関数の方程式は $y = a(x - p)^2$ とおける。

点 $(1, -8)$ を通るので

$$-8 = a(1 - p)^2 \cdots \textcircled{1}$$

点 $(2, -2)$ を通るので

$$-2 = a(2 - p)^2 \cdots \textcircled{2}$$

①, ② より

$$\frac{-8}{-2} = \frac{a(1 - p)^2}{a(2 - p)^2} \quad \leftarrow \text{下の (注) を見よ}$$

$$\frac{\cancel{-8}}{\cancel{-2}} = \frac{a(1 - p)^2}{a(2 - p)^2}$$

$$\frac{4}{1} = \frac{(1 - p)^2}{(2 - p)^2} \quad \leftarrow \text{約分をした}$$

$$4(2-p)^2 = (1-p)^2 \leftarrow \frac{B}{A} = \frac{D}{C} \Rightarrow BC = AD \text{ より}$$

$$4(p^2 - 4p + 4) = p^2 - 2p + 1$$

$$3p^2 - 14p + 15 = 0$$

$$(p-3)(3p-5) = 0$$

$$p = 3, \frac{5}{3}$$

$p = 3$ のとき、①に代入 $-8 = a(1-3)^2$ これより $a = -2$

$p = \frac{5}{3}$ のとき、①に代入 $-8 = a(1 - \frac{5}{3})$ これより $a = -18$

以上より、求める2次関数の方程式は $y = -2(x-3)^2$, $y = -18(x - \frac{5}{3})^2$

【柱】

$$\begin{cases} -8 = a(1-p)^2 \dots\dots\dots \textcircled{1} \\ -2 = a(2-p)^2 \dots\dots\dots \textcircled{2} \end{cases} \text{ について}$$

連立方程式は中学校の時のことを少し思い出して欲しいんだけど、加減法や代入法があったと思います。2元連立方程式の場合、1文字消去してあるひとつの文字のみにするのが連立方程式の解き方の基本だったと思います。

今回も、連立方程式だから①,②の2式から1文字消去して解いていくことが基本です。

こういったタイプは分数をとると、うまくいきます。また、なぜこうしてOKか分からない人が多いから一応かいておきます。

$$A = B \text{ かつ } C = D \text{ ならば } \frac{A}{C} = \frac{B}{D} \text{ ただし } C \neq 0, D \neq 0$$

上記はあきらかだよね左辺と右辺を見比べてほしいんだけど $A = B$ なんだから左辺と右辺の分子どうしが等しい、また $C = D$ なんだから左辺と右辺の分母どうしが等しい。だから、分数どうしも等しくて、 $\frac{A}{C} = \frac{B}{D}$ が成立します。

ただし、分母に0がくることができないので $C \neq 0$, $D \neq 0$ という条件が必要です。

では、(3)に進みます。

【(3) の解答】

*頂点の x 座標が1と、頂点に関する情報が与えられているので赤枠のパターン①のタイプの問題です。

頂点の x 座標が1なので、求める2次関数の方程式は $y = a(x - 1)^2 + q$ とおける。

点 $(-1, -5)$ が曲線上の点より

$$-5 = a(-1 - 1)^2 + q$$

$$4a + q = -5 \cdots \text{①}$$

点 $(2, 1)$ が曲線上の点より

$$1 = a(2 - 1)^2 + q$$

$$a + q = 1 \cdots \text{②}$$

①, ②を連立して $(a, q) = (-2, 3)$

よって求める2次関数の方程式は $y = -2(x - 1)^2 + 3$

【(4) の解説】

少し難しそうだけど、それほど難しくありませんよ。問題の最初の条件 $y = 3x^2$ を平行移動したものの扱いは分かるかな？平行移動の公式 $y = f(x) \rightarrow y - q = f(x - p)$ を考えれば明らかだと思うけど、放物線を平行移動しても x^2 の係数は変わらない。逆から言うと、放物線の形は x^2 の係数で決まる。

今回の問題では、必要ありませんが放物線の形は、 x^2 の係数で決まるということを覚えておいてください。

後は、頂点が直線 $y = 2x + 1$ 上にあるんだから、頂点の x 座標を p とおけば頂点の y 座標は $2p + 1$ となります。

このことより、求める2次関数の方程式は $y = 3(x - p)^2 + p + 1$ とおくことができます。

【注】

今、「放物線の形」といいました。ですが、すべての放物線は相似であって形が違うということではありません。ただ、少し分かりやすいようにあえて形と表記しています。

数学的に言うと、上記は「2次関数のグラフの形」ではなく「2次関数のグラフの縮尺」が正しい表記です。

*上記ですが意味の分からない人はごめんなさいね。まず、最初の段階では放物線は平行移動しても x^2 の係数は不変！覚えておくのはそれだけでよいですよ。

【(4) の解答】

曲線 $y = 3x^2$ を平行移動させたものだから x^2 の係数は3、また頂点の x 座標を p とすると頂点は $y = 2x + 1$ 上にあるので、頂点の y 座標は $2p + 1$ となる。このことより、求める2次関数の方程式は $y = 3(x - p)^2 + 2p + 1$ とおける。

この2次関数のグラフが点 $(1, 3)$ を通るので

$$3 = 3(1 - p)^2 + 2p + 1$$

$$3 = 3(p^2 - 2p + 1) + 2p + 1 \quad (p - 1)(3p - 1) = 0$$

$$3 = 3p^2 - 6p + 3 + 2p + 1$$

$$p = 1, \frac{1}{3}$$

$p = 1$ のとき、求める2次関数の方程式は $y = 3(x - 1)^2 + 3$

$p = \frac{1}{3}$ のとき、求める2次関数の方程式は $y = 3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}$

【(5) の解説】

今回は、頂点に関する情報が何も与えられてなく、通る点3点が与えられているので赤枠のパターン②の $y = ax^2 + bx + c$ とおいてといていきます。

通る点3点が与えられているので、それらを $y = ax^2 + bx + c$ に代入することで得られる式を連立して解いていけばいいだけの問題です。

3元連立（変数が3つの方程式）の方程式の解法の基本は、式をうまく式変形して2元

連立（変数が2つ）にしてからといていくことです。

今回の場合

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \cdots \textcircled{1} \\ 9a + 3b + c = 6 \cdots \textcircled{2} \\ 4a - 2b + c = 16 \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

②-①と③-①をしたら変数の c が消えて変数が a, b のみになってくれるので、こうやって連立方程式を解いていきます。

【(5) の解答】

求める2次関数の方程式を $y = ax^2 + bx + c$ とおく。

放物線が点(1, 4)を通るので、 $4 = a + b + c \cdots \textcircled{1}$

放物線が点(3, 6)を通るので、 $6 = 9a + 3b + c \cdots \textcircled{2}$

放物線が(-2, 16)を通るので、 $16 = 4a - 2b + c \cdots \textcircled{3}$

②-①より

$$2 = 8a + 2b \text{ つまり } 4a + b = 1 \cdots \textcircled{4}$$

③-①より

$$12 = 3a - 3b \text{ つまり } a - b = 4 \cdots \textcircled{5}$$

④と⑤を連立して $(a, b) = (1, -3)$

また①に $(a, b) = (1, -3)$ を代入して計算すると $c = 6$

よって求める2次関数の方程式は $y = x^2 - 3x + 6$ となる。

* 3元連立の方程式は2元連立の方程式に比べて計算間違いをする人が多いです。できたら、答えが出た後に検算をしておいた方がいいですよ。

【(6) の解説】

この問題も3点を通る問題だから(5)と同じように $y = ax^2 + bx + c$ とおいて解いてもらってもいいだけで、さっき(5)を解いてもらって分かったと思うけど、3元連立はメンドウなんだ、だからできるだけしたくない…

そこで、この問題よく見てほしいんだけど、これは2点(4,0), (1,0)を通るって言うてるんだよね。つまり、 x 軸との交点の x 座標は $x = 1, 4$ だから、この2次関数の方程式は $y = a(x-1)(x-4)$ っておけるんじゃない？

なぜ $y = a(a-1)(x-4)$ ってなるか分からない人は、逆から考えてみて $y = \bigcirc(x-1)(x-4)$ と x 軸との交点は？ってきかれたら $x = 1, 4$ ってすぐに分かるよね。○の部分は何がきてもいい。

x 軸との交点が $x = \alpha, \beta$ の2次関数の方程式は $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$ とおけるということを覚えておいてください。では、解答に進みます。

【(6) の解答】

放物線が2点(4,0), (1,0)を通るので、放物線の方程式は $y = a(x-4)(x-1)$ とおける。

この放物線が点(0,-4)を通るので、

$$-4 = a(0-4)(0-1)$$

$$a = -1$$

よって求める2次関数の方程式は

$$y = -(x-4)(x-1)$$

$$= -x^2 + 5x - 4$$

求める2次関数の方程式は $y = -x^2 + 5x - 4$ である。

* $y = -(x-4)(x-1)$ のまま答えにする人も多いです。これでも大丈夫だと思います。ですが、一度書きましたが2次関数の方程式は $y = ax^2 + bx + c$ または $y = a(x-p)^2 + q$ で書くことが多いので、この形に変形しておきました。

これで2次関数第3回「2次関数の決定」は終わりです。しっかりと勉強しておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>

ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司