
２次関数No7
「場合分けの必要な最大値、最小値(定義域が変数)」

こんにちは、河見賢司です。今回は、場合分けの第７回として「場合分けの必要な最大値、最小値問題 (定義域が変数)」を解説したいと思います。

この「場合分けの必要な最大値、最小値問題」が２次関数の中で一番難しい問題だと思います。とは言え、この最大値、最小値問題の考え方はこれ以降勉強する、三角関数や微分などの関数分野の基礎となってくるので、しっかりと勉強しておいてください。

「関数の最大値、最小値はグラフをかいて考える」ということが基本です。このあたりのことは、前回の第６回で詳しく解説しています。読んでいない人は、まずは第６回の方を読んでからこのプリントに進むようにしてください。

２次関数第６回 「関数の最大値、最小値問題の考え方」 http://www.hmg-gen.com/2jino6.pdf

それでは、今回のプリントの本題に進もうと思いますが、場合分けの必要な最大値、最小値問題に進む前にまずは次の問題を解いてみてください。

補題

関数 $y=(x-1)^2$ の以下の範囲における最小値を求めよ

(1) $-2 \leqq x \leqq 0$　　(2) $0 \leqq x \leqq 2$　　(3) $2 \leqq x \leqq 4$

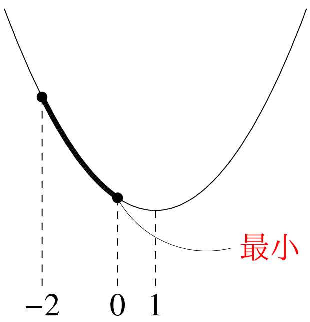
【解説】

「**関数の最大値、最小値問題はグラフをかいて考える**」ということを覚えておいてください。

今回の問題も関数の最大値、最小値問題ですからグラフをかいて考えていきます。

【解答】

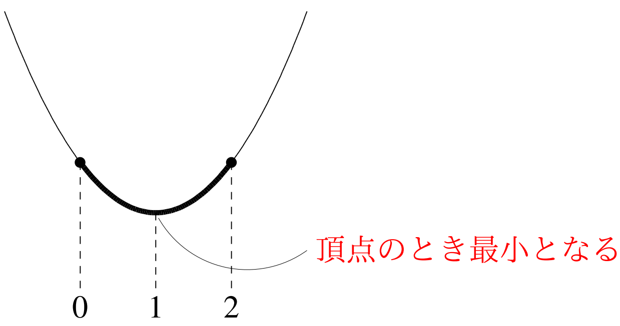
(1)



グラフより、$x=0$ のとき最小となる。$y=(x-1)^2$ に $x=0$ を代入すると 1。

よって $x=0$ のとき最小値 **1** をとる。

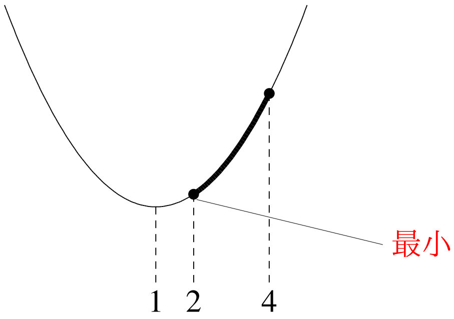
(2)



グラフより、$x = 1$ のとき最小となる。$y = (x - 1)^2$ に $x = 1$ を代入すると 0。

よって $x = 1$ のとき最小値 **0** をとる。

(3)



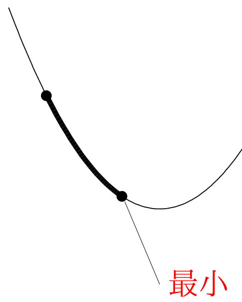
グラフより、$x = 2$ のとき最小となる。$y = (x - 1)^2$ に $x = 2$ を代入すると 1。

よって $x = 2$ のとき最小値 **1** をとる。

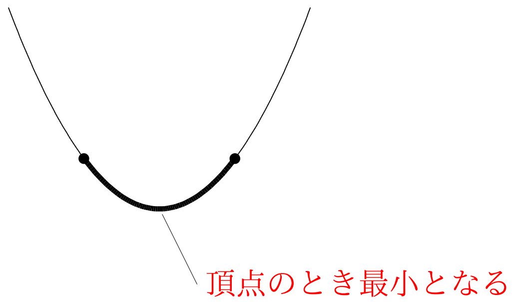
これで、補題は終わりです。この補題だけならほとんどの人が解けたと思うんですけど、
ここで覚えてほしいことは次の図です。

2次関数の最小値の位置

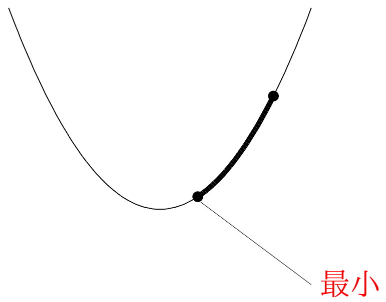
(i) 定義域が軸の左側にあるとき



(ii) 定義域が軸を含んでいるとき



(iii) 定義域が軸の右側にあるとき



上図の赤枠のように、下に凸の2次関数の最小値の位置は、(i) 定義域が軸の左側にある、(ii) 定義域が軸を含んでいる、(iii) 定義域が軸の右側にあるかで変わってきます。

$a \leqq x \leqq a+1$ のように a の値によって定義域が変わってくるときも、上記の3パターンに場合分けをしたらいいだけなんです。では、このことを踏まえた上で次の問題を解いてください。

問題

$y = x^2 - 2x + 5$ の $a \leqq x \leqq a+1$ における最小値を求めよ。

【解説】

最小値の問題だから、さっきの考え方に基づいて定義域が軸の左側にある、軸を含んでいる、軸の右側にあるかで判断をしていくんだけど、その前に $y = x^2 - 2x + 5$ の平方完成をしないと軸の位置が分からないので、まずは平方完成をします。

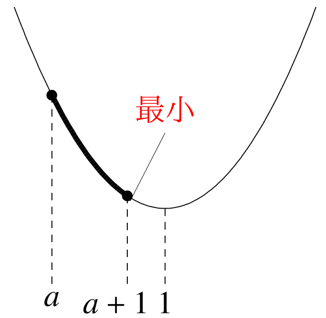
$y = x^2 - 2x + 5$

$\quad = (x-1)^2 - 1 + 5$

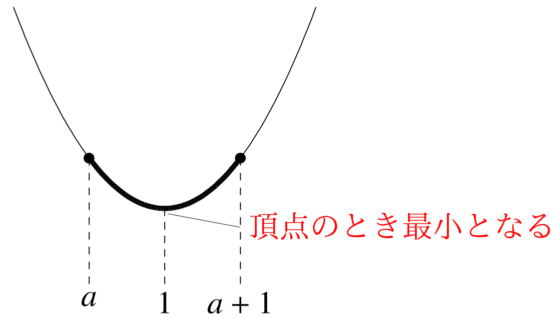
$\quad = (x-1)^2 + 4$ ◀ 平方完成をして、軸が直線 $x = 1$ ということが分かった

では、この問題を解いていくけど、この問題は以下の３パターンに場合分けします。

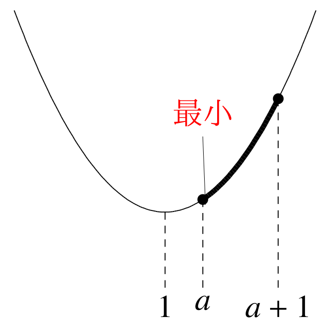
(ｉ) 定義域が軸の左側にあるとき



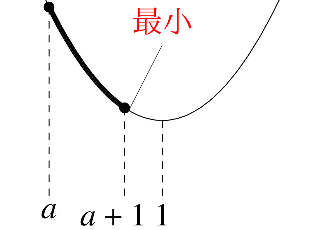
(ii) 定義域が軸を含んでいるとき



(iii) 定義域が軸の右側にあるとき



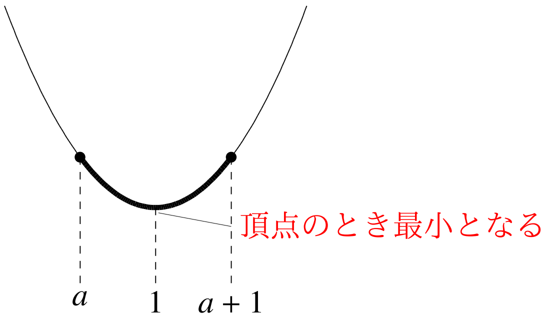
で、これを使って解いていくんですけど、ここで場合分けが必要になってきます。
まず、(i) は a がどういう値の範囲になるか分かる？もう一度図をかくけど



こうなるときは定義域の右側の $a+1$ が 1 の左側にあるときだよね？左側にあるっていうことは $a+1$ が 1 より小さいときなんだから、当然 $a+1<1$ ってなります。

$a+1<1$ を a について解くと $a<0$ になるので、$a<0$ のときは $x=a+1$ で最小値をとります。

次に、(ii) の場合です。(ii) 場合は下図のようになります。



上記のようになるには軸の $x=1$ が a と $a+1$ に挟まれているので $a \leqq 1 \leqq a+1$ のときです。

$a \leqq 1 \leqq a+1$ を a について解いていきますが、この不等式の解き方は知っている人も多いと思いますが念のため書いておきます。

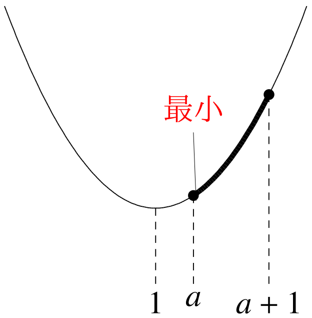
$A<B<C \iff A<B$ かつ $B<C$ である。

これに従って $a \leqq 1 \leqq a+1$ を解くと

$a \leqq 1 \leqq a+1 \iff a \leqq 1$ かつ $1 \leqq a+1$ となります。$1 \leqq a+1$ を解くと $a \geqq 0$ となります。

$a \leqq 1$ と $a \geqq 0$ をあわせて書くと $0 \leqq a \leqq 1$ のときとなります。このとき、上図より $x=1$ のとき最小となります。

最後に (iii) のときです。



上図のようになるときは、1 より a の方が右側にある、つまり 1 より a の方が大きときだから $1 < a$ となります。このとき $x = a$ で最小値をとります。

以上のことを踏まえ解答に移ります。

【解答】

$y = f(x) = x^2 - 2x + 5$ とする。

$$\begin{aligned} y = f(x) &= x^2 - 2x + 5 \\ &= (x-1)^2 + 4 \end{aligned}$$ ◀ 平方完成をした

(i) $a + 1 < 1$ つまり $a < 0$ のとき、$x = a + 1$ で最小となる。

$$\begin{aligned} f(a+1) &= (a+1-a)^2 + 4 \\ &= a^2 + 4 \end{aligned}$$ ◀ $x = a + 1$ を平方完成した式に代入した。

(ii) $a \leqq 1 \leqq a + 1$ つまり $0 \leqq a \leqq 1$ のとき、$x = 1$ で最小値 4 をとる。

(iii) $1 \leqq a$ のとき、$x = a$ で最小値 $a^2 - 2a + 5$ をとる。

以上より、$\begin{cases} a < 0 \text{ のとき、} x = a+1 \text{ で最小値 } a^2 + 4 \text{ をとる。} \\ 0 \leqq a \leqq 1 \text{ のとき、} x = 1 \text{ で最小値 } 4 \text{ をとる。} \\ 1 < a \text{ のとき、} x = a \text{ で最小値 } a^2 - 2a + 5 \text{ をとる。} \end{cases}$

＊真ん中の場合分けを $0 \leqq a \leqq 1$ としました。$a = 0$ や $a = 1$ のときは、どっちの場合分けにいれてもいいですよ。例えば、「$a \leqq 0$ のとき、$0 < a < 1$ のとき、$1 \leqq a$ のとき」としてもらっても大丈夫です。

これで、最小値の方が終わりました。次に最大値に進みますね。

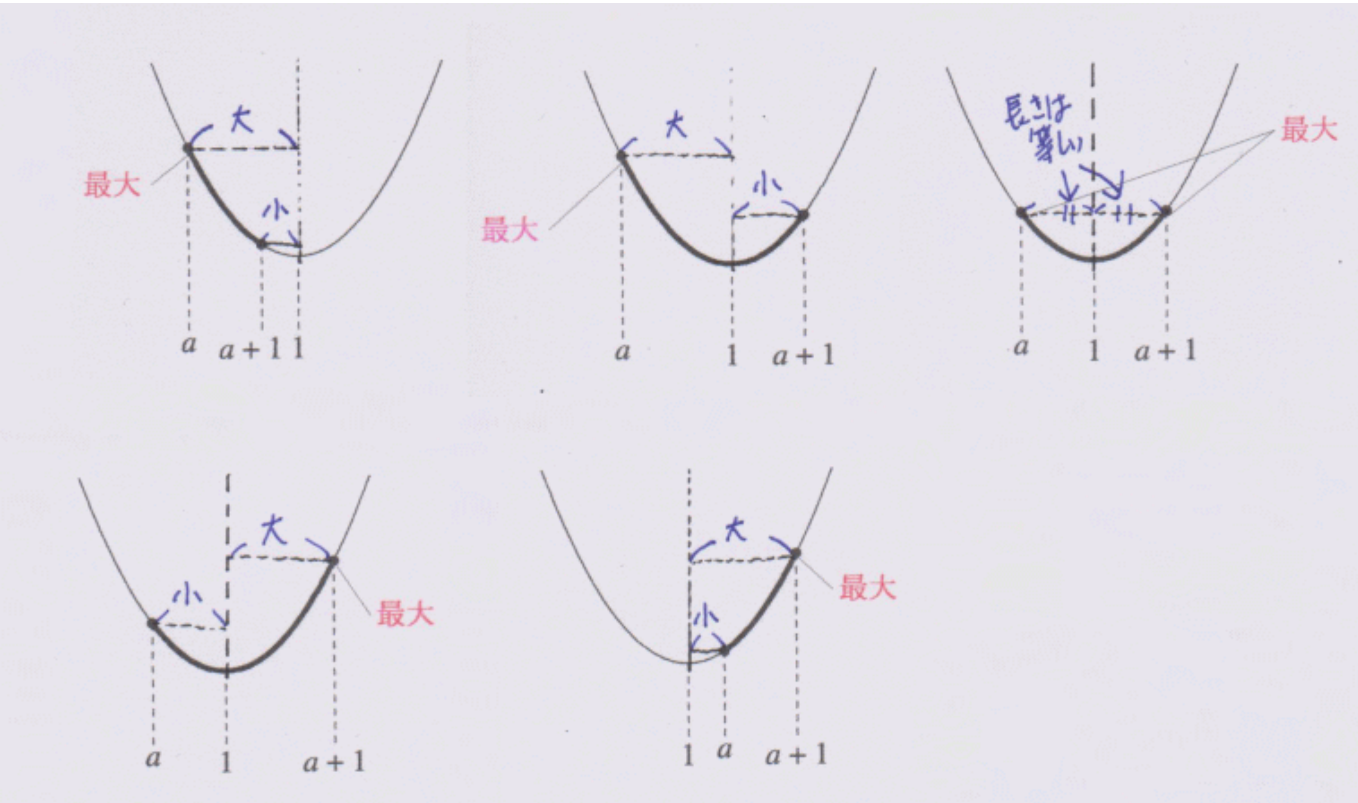
問題

$y = x^2 - 2x + 5$ の $a \leqq x \leqq a+1$ における最大値を求めよ。

【解説】

次に最大値です。最小値のときと同じく定義域を含んだグラフをかいてみます。

最小値のときは、定義域の中に軸が含まれているとき頂点が最小となりました。ですが、最大値のときは定義域の中に軸が含まれているものでも、２通りに場合分けをしないといけないので、とりあえず以下の５パターンです。



で、とりあえず５つを書いたんだけど、上記を見てもらったら分かると思います。

放物線って軸に関して対称なんだよね、だから軸から遠い方で最大ってなるんじゃないかな？今回の場合、$a \leqq x \leqq a+1$ が定義域で軸は直線 $x = 1$ です。

で、ここからなんだけど軸から a までの距離、軸から $a+1$ までの距離と考えてもいいんだけど、以下のように考える方がラクです。a と $a+1$ が定義域の端だったんだけど、この２つの平均は $\dfrac{a+(a+1)}{2}=a+\dfrac{1}{2}$ です。

（x 軸で考えると）この $a+\dfrac{1}{2}$ より、軸の１が $a+\dfrac{1}{2}$ よりも大きい（右側にあるとき)、１から a までの距離の方が１から $a+1$ までの距離よりも大きくなるよね。

逆に１が $a+\dfrac{1}{2}$ よりも小さい（左側にあるとき)、１から $a+1$ までの距離の方が１から a までの距離よりも大きくなります。

そして、$a+\dfrac{1}{2}=1$ のときは、中点に軸があるので１から a までの距離と１から $a+1$ までの距離は同じです。

少し、紙面での説明は分かりにくいかもしれません。動画でも解説しています。分かりにくければ、「ユーチューブの動画解説」(⇐ 文字のところをクリックすると、画面が開きます) を見てください。

【解答】

$y=x^2-2x+5$

$\quad=(x-1)^2+5$

(ｉ) $a+\dfrac{1}{2}<1$ つまり $a<\dfrac{1}{2}$ のとき、$x=a$ で最大値 a^2-2a+5 をとる。

(ii) $a+\dfrac{1}{2}=1$ つまり $a=\dfrac{1}{2}$ のとき、$x=a, a+1$ つまり $x=\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}$ で最大値 $\dfrac{21}{4}$ をとる。

(iii) $a+\dfrac{1}{2}>1$ つまり $a>\dfrac{1}{2}$ のとき、$x=a+1$ で最大値 a^2+4 をとる。

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」→「入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールが分かれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています。
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
http://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司