

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

---

## 場合の数 その4

こんにちは、河見賢司です。今回は、場合の数の第4回です。

前回の「場合の数の第3回」で順列の中でも同じ文字を含むものを一列に並べるときの問題を解説しました。

ご覧になっていない人はコチラをご覧ください。 <http://www.hmg-gen.com/baai3.pdf>

今回は、前回解説をした「同じものを一列に並べるとき」の知識を使って解く、有名な問題を2つほど解説をしたいと思います。

今回、解説する内容はどの教科書にも載っているような有名な問題なので、場合の数を勉強した人はまず見たことがある問題だとは思いますが、何となく解いているだけでしっかりと理解しながら解けているという人は少ないと思います。

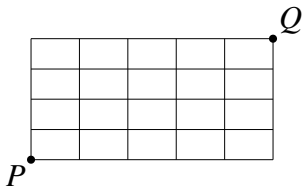
僕も高校生のときは、そうでした。なぜだか分からないけど、こうすると解けてしまうといった理由で大して考えることもなく解いてました。

もちろん、それでも解けないこともないのですが、単なる暗記だと時間がたつとどうしても忘れてしまいます。ですが、ひとつずつ理解しながら解いていくと、忘れにくいです。ですから、「知っているよ」と思う問題であってもじっくりと解説を読んで欲しいです。

それでは、今回の本題に進みます。まずは、最短経路に関する問題です。

問題 1

$P$  から  $Q$  まで行く最短経路は何通りあるか。



【解説】

$P$  から  $Q$  に向かうときは、最短経路となるには右か上にしかいったらダメだよね。もし、左とか下に行ったら最短じゃなくなってしまいます。

で、 $P$  から  $Q$  に向かう方法が何通りあるかだけど、 $P$  から  $Q$  には右向きに 5 回。上向きに 4 回進まないといけないんだから、求めたい場合の数は右向きの矢印  $\rightarrow$  5 個と上向きの矢印  $\uparrow$  4 個を一行に並べる時の場合の数と等しくなります。

よって場合の数は  $\frac{9!}{5!4!}$  となります。前回の場合の数の第 3 回でも言いましたが、この場合、 ${}_9C_5$  と計算しても計算結果はもちろん同じになります。

2通りの解き方(表記の仕方)がありますが、好きなほうでいいと思いますよ。ただ、意味は「 $\rightarrow$  5 個と上向きの矢印  $\uparrow$  4 個を一行に並べる時の場合の数」なんだ、ということは理解しておいてください。

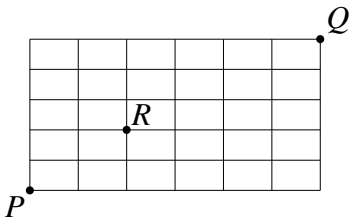
【解答】

$$\frac{9!}{5!4!} = 126 \text{ 通り}$$

では、次のこの最短経路の問題でもよく出題される頻出問題を解きたいと思います。

問題 2

$P$  から  $Q$  まで行く最短経路のうち  $R$  を通らないものは何通りあるか



【解説】

まず、問題文を見てほしいんだけど「 $R$  を通らない」ものの場合の数を求めよだね。

今回の問題に限らず、数学には「否定文って考えにくい」という鉄則があります。ですから、否定文が来たときは「肯定文に直せないかな？」と考えるようにしておいてください。

分かると思うけど、今回の場合次の関係式が成り立つよね。

( $P$  から  $Q$  に向かう (全体の) 最短経路) = ( $R$  を通る場合の最短経路) + ( $R$  を通らない場合の最短経路)

$\Leftrightarrow$  ( $R$  を通らない場合の最短経路) = ( $P$  から  $Q$  に向かう (全体の) 最短経路) - ( $R$  を通る場合の最短経路)

上記のような関係式ができます。これなら否定分である「 $R$  を通らない」を直接求めることなく解くことができるよね。

今回のように簡単な問題だったらすぐに気づくことができるけど、複雑になると気づきにくいときもあります。ですから「否定文が来たら、肯定文に直せないかな？」ということは、徹底して頭に叩き込んで問題文に否定文がきた瞬間に思いつけるようになっておいてください。

「 $R$ を通る場合の数」はこれまで場合の数を3回にわたって話してきましたが、そのことを理解していたら簡単です。日本語に直すと、次のようになります。

「 $P$ から $R$ に進む $\left(\frac{4!}{2!2!}\text{通り}\right)$ 」そして「 $R$ から $Q$ に進む $\left(\frac{7!}{4!3!}\text{通り}\right)$ 」です。「そして」は、掛け算なので $R$ を通る場合の数は $\frac{4!}{2!2!} \times \frac{7!}{4!3!}$ です。それでは、解答に進みます。

### 【解答】

求める最短経路の数は、 $P$ から $Q$ の最短経路全体から $R$ を通るものを引いたもの。

$P$ から $Q$ の最短経路全体は $\frac{11!}{5!6!} = 462$ 通り

$R$ を通るものは $\frac{4!}{2!2!} \times \frac{7!}{4!3!} = 210$

よって求める最短経路の数は $462 - 210 = 352$ 通り ◀ **これが答え**

では、次の問題に進みます。いきなりですが、次の問題を解いてください。たぶん見たことのある問題ですよ。

#### 問題3

8個のりんごを3人で分ける。1個ももらわない人があってもよいものとするとは何通りの分け方があるか

### 【解説】

有名な問題なので、知っている人も多いと思いますが初めてみる人は、どうやって解くのかな？となんだか分かりにくい問題ですよ。

これは次のように考えます。例えばAさん、Bさん、Cさんの3人で分けることとします。

○ ○ | ○ ○ ○ | ○ ○ ○

上記のようにリンゴに仕切りを入れたと考えます。そして、一番左側がAさんがもらうリンゴ、真ん中がBさんのもらうリンゴ、一番右側がCさんがもらうリンゴとします。

上記のようになったときもらうリンゴの個数はAさん2個、Bさん3個、Cさん3個です。

次のようになったときは、

○ | ○ ○ ○ ○ ○ ○ | ○

上記のときAさん1個、Bさん6個、Cさん1個です。

極端な場合ですが、次のようになったとき

|| ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Aさん0個、Bさん0個、Cさん8個です。

ここまできたら分かる人が多いと思うけど、今回の問題の場合の数は、| 2個と○ 8個を一行に並べる場合の数と一致します。ですから、今回の問題の答えは  $\frac{10!}{2!8!}$  となります。

### 【解答】

求める場合の数は  $\frac{10!}{2!8!} = 45$  通り

次に、以下の問題を解いてください。

問題4

$x, y, z$  は0以上の整数とする。このとき  $x+y+z=8$  の解の個数を求めよ

【解説】

「今、場合の数の問題を解いているはずなのに、なぜ整数問題？」なんて思うかもしれませんが、実はこれさっきの問題とまったく同じです。

さっきは8個のリンゴをAさん、Bさん、Cさん3人で分けました。Aさんのもらうリンゴの個数を  $x$  個、Bさんを  $y$  個、Cさんを  $z$  個としたら、当然  $x+y+z=8$  となるよね？

このタイプの問題もたまに出てくるので、よく覚えておいてください。

【解答】

$x, y, z$  の解の個数は、問題3の場合と等しい。よって、45個

では、似たような問題ですが次の問題を解いてください。

問題5

$x, y, z$  は正の整数とする。このとき  $x+y+z=8$  の解の個数を求めよ

【解説】

問題5とほとんど同じですけど、少しだけ違います。どこが違うかと言うと、さっきは「 $x, y, z$  は0以上の整数」だったけど、今回は正の整数だよね。つまり、0を含んではいけないということ

さっきみたいに仕切りで考える手法だと、0個の場合も含んじやうので少しくまききません…そこで、考えないといけません。この問題の考え方は2通りあります。式で考える手法と問題文から考える手法です。

まずは、式で考える手法で考えていきます。

まず、今回なぜ考えにくいかというと「正の整数で、0を含まない」からだよね？だったら、少し強引に式変形をして0を含む形にしたらいんじゃない？次のように式変形をします。

$x, y, z$  は正の整数を表記すると、 $x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1$  これを0以上にしたいんだから、両辺から1を引いて(1を移項すると考えてもよい) $x-1 \geq 0, y-1 \geq 0, z-1 \geq 0$  となるよね。

$x+y+z=8$  は  $(x-1)+(y-1)+(z-1)=5$  となります。

ここまで式変形をできたら、 $x-1, y-1, z-1$  の0以上の整数解の個数だったら、0以上になったんだからさっきの仕切りの手法で解くことができるよね。

たまにこの説明では分からない人もいます。これで分からなかったら  $x-1=X, y-1=Y, z-1=Z$  とでも置き換えたら分かりやすいですよ。

こうすると  $X+Y+Z=5, (X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0)$  の整数解の個数だったら求めることができるよね。

$X=x-1$  なんだから  $X$  の個数と  $x$  の個数は当然一致します。

### 【解答】

$$x+y+z=8$$

$$(x-1)+(y-1)+(z-1)=5$$

$x-1 \geq 0, y-1 \geq 0, z-1 \geq 0$  より、求める整数解の個数は  $\frac{7!}{2!5!} = 21$  個

これが式で解く手法です。もう一つは日本語で考える方法もあります。数式で考えるよりも、リングで考えた方が分かりやすいと思うのでリングにすることにします。

3人にリング8個を分ける場合の数ですが、一人最低でも1個以上はもらわないといけません。ですから、まずリングを一人にひとつずつ渡しておきます。

8個のリンゴを3人にひとつずつ渡すのですから、残ったリンゴの個数は5個です。残りの5個は3人に自由に分けることができます。

もちろん、この場合1個ももらわない人がいてもOKですので、今回求める場合の数は5個を3人で分ける(0個の場合もOK)の場合の数と同じです。それでは、解答に進みます。

### 【解答】

$x + y + z = 8, (x \geq 1, y \geq 1, z \geq 1)$  の整数解の個数は  $X + Y + Z = 5, (X \geq 0, Y \geq 0, Z \geq 0)$  の解の個数と一致するので、 $\frac{7!}{2!5!} = 21$  個

これで、今回の解説プリントは終わりです。次回は、円順列について基本的な問題を通して解説をしていきます。それでは、がんばってください。

### 【無料で読めるメルマガの紹介】

---

数学って難しいですね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」



多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！  
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



---

ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)

河見賢司