

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

因数分解 5

「 $(\quad)^2 - (\quad)^2$ を使った因数分解」

今回は因数分解の第5回。「 $(\quad)^2 - (\quad)^2$ を使った因数分解」です。

これまで公式を使った因数分解、共通因数でくくりだす因数分解、最低次の文字で整理する因数分解を解説していきました。

これまで勉強してきた上記の手法で因数分解できないときは、今回解説する「 $(\quad)^2 - (\quad)^2$ を使った因数分解」を使って解くことが多いです。

慣れてくると、この解法で解いていくということにすぐに気づけるとはいますが、最初のうちは気づきにくいことも多いと思います。

因数分解の問題ではまず上記のような公式、共通因数、最低次で整理する解法で考えてみて、それでもうまくいきそうにないときは今回の「 $(\quad)^2 - (\quad)^2$ を使った因数分解」で解けるのではないかと考えるようにしてください。

まずは次のような問題を解いてみてください。

問題 1

$x^4 + x^2 + 1$ を因数分解せよ

【解説つきの解答】

まず今回の問題だけど、公式も使えそうにないし、共通因数もなさそう、最低次で整理することもなさそう（←最低次でそろえるのは最低次の次数が1か2のときだったよね。今回は最低次は4だから最低次でそろえる解法は使わない）

そんなときは $()^2 - ()^2$ を使った解法で解いていきます。

この解法を使うには $()^2 - ()^2$ の形にならないといけないので、平方完成をするなどして強引に $()^2 - ()^2$ の形にすることがポイントです。

このことを頭に入れて、解いていきます。

$$\begin{aligned} & x^4 + x^2 + 1 \\ & = (x^4 + x^2) + 1 \end{aligned}$$

↑ $()^2 - ()^2$ にしないといけないので、 $(x^4 + x^2)$ を強引に $()^2$ の形にしてみることにした

$$= \left\{ \left(x^2 + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right\} + 1 \quad \blacktriangleleft \text{強引に2乗の形にした}$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} + 1$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \quad \blacktriangleleft \text{??これでは}()^2 - ()^2 \text{の形になってくれない}$$

とりあえず $()^2 - ()^2$ の形がでてくれるように強引に $()^2$ の形にしたけど、これでは $()^2 - ()^2$ の形になってくれないよね。そこで、違うペアでやってみることにします。

$$\begin{aligned} & x^4 + x^2 + 1 \\ & = (x^4 + 1) + x^2 \end{aligned}$$

↑さっき $(x^4 + x^2)$ で2乗を作ったらうまくいかなかったので今度は $(x^4 + 1)$ で作ってみることにした

$$= \{(x^2 + 1)^2 - 2x^2\} + x^2 \quad \blacktriangleleft \text{強引に}()^2 \text{の形を作った}$$

$$= (x^2 + 1)^2 - x^2 \quad \blacktriangleleft ()^2 - ()^2 \text{の形になった}$$

$$= \{(x^2 + 1) + x\}\{(x^2 + 1) - x\} \quad \blacktriangleleft A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \text{の公式を使った}$$

$$= (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \quad \blacktriangleleft \text{整理して因数分解終了!}$$

$()^2 - ()^2$ の形にするにはペアの取り方やプラスマイナスの取り方をうまくしないとってくれないことが多いです。上記でもやってみましたが、とりあえず式変形を試してみてもうまくいかないようなら違うペアでやってみるようになさってください。

では、次の練習問題を解いてください。

練習 1

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^4 + 4$

(2) $x^4 + 4x^2 + 16$

(3) $x^4 - 13x^2y^2 + 4y^4$

(4) $4x^4 + 11x^2y^2 + 9y^4$

【解答】

(1)

$$x^4 + 4$$

$$= (x^2 + 2)^2 - 4x^2 \quad \blacktriangleleft \text{強引に 2 乗の形を作った}$$

$$= (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 \quad \blacktriangleleft ()^2 - ()^2 \text{の形になった}$$

$$= \{(x^2 + 2) + 2x\}\{(x^2 + 2) - 2x\} \quad \blacktriangleleft A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \text{の公式を使った}$$

$$= (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2) \quad \blacktriangleleft \text{整理して因数分解終了!}$$

(2)

* やってみればわかると思うけど、 $(x^4 + 4x^2)$ で 2 乗を作ってもうまくいきません。 $(x^4 + 16)$ で 2 乗を作ります。

$$x^4 + 4x^2 + 16$$

$$= (x^4 + 16) + 4x^2$$

$$= \{(x^2 + 4)^2 - 8x^2\} + 4x^2$$

$$= (x^2 + 4)^2 - 8x^2 + 4x^2$$

$$= (x^2 + 4)^2 - 4x^2$$

$$= (x^2 + 4)^2 - (2x)^2 \quad \blacktriangleleft ()^2 - ()^2 \text{の形になった}$$

$$= \{(x^2 + 4) + 2x\}\{(x^2 + 4) - 2x\} \quad \blacktriangleleft A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \text{の公式を使った}$$

$$= (x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4) \quad \blacktriangleleft \text{整理して因数分解終了!}$$

(3)

* 今回は $(x^4 + 4y^4)$ をペアにして 2 乗を作っていきます。 $(x^4 + 4y^4) = (x^2 + 2y^2)^2 - 4x^2y^2$ としたくなりますが、これではうまく $()^2 - ()^2$ の形になってくれません。

$(x^4 + 4y^4) = (x^2 - 2y^2)^2 + 4x^2y^2$ と変形したらうまくいきます。言われてら気づくと思うけど、最初からはなかなか気づかないよね。

とりあえず思いついた解法で解いてみてそれでうまくいかなければ別の解法を考えると
いうやり方で解いていってください。

$$\begin{aligned}
 & x^4 - 13x^2y^2 + 4y^4 \\
 &= (x^4 + 4y^4) - 13x^2y^2 \\
 &= \{(x^2 - 2y^2)^2 + 4x^2y^2\} - 13x^2y^2 \\
 &= (x^2 - 2y^2)^2 - 9x^2y^2 \\
 &= (x^2 - 2y^2)^2 - (3xy)^2 \leftarrow (\quad)^2 - (\quad)^2 \text{の形になった} \\
 &= \{(x^2 - 2y^2) + 3xy\}\{(x^2 - 2y^2) - 3xy\} \leftarrow A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \text{の公式を使った} \\
 &= (x^2 + 3xy - 2y^2)(x^2 - 3xy - 2y^2) \leftarrow \text{整理して因数分解終了！}
 \end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}
 & 4x^4 + 11x^2y^2 + 9y^4 \\
 &= (4x^4 + 9y^4) + 11x^2y^2 \\
 &= \{(2x^2 + 3y^2)^2 - 12x^2y^2\} + 11x^2y^2 \\
 &= (2x^2 + 3y^2)^2 - x^2y^2 \\
 &= (2x^2 + 3y^2)^2 - (xy)^2 \leftarrow (\quad)^2 - (\quad)^2 \text{の形になった} \\
 &= \{(2x^2 + 3y^2) + xy\}\{(2x^2 + 3y^2) - xy\} \leftarrow A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \text{の公式を使った} \\
 &= (2x^2 + xy + 3y^2)(2x^2 - xy + 3y^2) \leftarrow \text{整理して因数分解終了！}
 \end{aligned}$$

次に少し変わった問題を解いてもらいます。

問題 1

$$x^2 - 60x + 779 \text{ を因数分解せよ。}$$

【解説】

これは中学生の知識でも解けないことがないんだけど、因数分解するんだからたして-60、
かけて779となるような2つの数字を選びだすんだよね。探したらできないことないけど、
ものすごく面倒臭そう …

そこでこういった因数分解でも $(\quad)^2 - (\quad)^2$ の因数分解でも解けるということを覚えて
おいてください。

【解答】

$$\begin{aligned}
 & x^2 - 60x + 779 \\
 &= (x - 30)^2 - 900 + 779
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (x - 30)^2 - 121 \\
&= (x - 30)^2 - 11^2 \quad \blacktriangleleft \quad (\quad)^2 - (\quad)^2 \text{ の形になった} \\
&= \{(x - 30) + 11\}\{(x - 30) - 11\} \quad \blacktriangleleft \quad A^2 - B^2 = (A + B)(A - B) \text{ の公式を使った} \\
&= (x - 19)(x - 41) \quad \blacktriangleleft \quad \text{整理して因数分解終了!}
\end{aligned}$$

上記のやり方だったら簡単に因数分解できるよね。頻度としてはそれほど高くないけど、たまにでてくるのでしっかりと覚えておいてください。それでは次の練習問題を解いてください。

練習問題 2

次の式を因数分解せよ。

(1) $x^2 + 4x - 165$

(2) $x^2 - 80x + 1311$

【解答】

(1) $x^2 + 4x - 165$

$$= (x + 2)^2 - 4 - 165$$

$$= (x + 2)^2 - 169$$

$$= (x + 2)^2 - 13^2$$

$$= \{(x + 2) + 13\}\{(x + 2) - 13\}$$

$$= (x + 15)(x - 11)$$

(2) $x^2 - 80x + 1311$

$$= (x - 40)^2 - 1600 + 1311$$

$$= (x - 40)^2 - 289$$

$$= (x - 40)^2 - 17^2 \quad \blacktriangleleft \quad \text{(注)}$$

$$= (x - 40 + 17)(x - 40 - 17)$$

$$= (x - 23)(x - 57)$$

(注について) $289 = 17^2$ に気づけなかった人もいるかもしれないけど、ここは絶対に $(\quad)^2 - (\quad)^2$ の形になってくれます。だから 279 も何かの 2 乗になっている。そう考えれば気づけるよね

今回はこれで終了です。

因数分解を 5 回にわたって解説しましたが、今回は最終回です。因数分解に関してはこれくらいやっておけば大丈夫だと思います。因数分解は数学の基礎となるところです。解き方をしっかりと理解しておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司