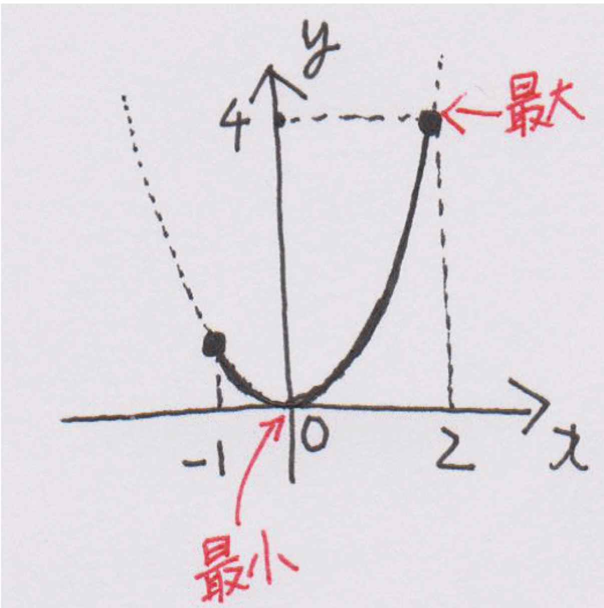
問題３９（Ａ）

$0 \leqq x \leqq 2\pi$ で定義された関数 $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{2} + \sin x}$ の最大値と最小値を求めよ。

【問題３９の解説】

最大値・最小値に関する問題です。分かっている人も多いと思うけど、復習も兼ねて簡単に最大値・最小値問題の解法を話しておきます。

関数の最大値・最小値問題はグラフをかいて解いていくということが基本的な解き方です（もちろん、グラフがかけるときの問題ですよ）。例えば $y = x^2$ の $-1 \leqq x \leqq 2$ における最大値と最小値を求めよと言われればグラフを書いて求めたよね。



上図のようにグラフをかけば簡単に最大値と最小値を求めることができます。もちろん、答えは $x = 2$ のとき最大値 4、$x = 0$ のとき最小値 0 です。

これが一般的な解き方ですが、微分を勉強していれば、微分をして増減表を書くだけで最大値と最小値を求めるという方法もあります。

$y = x^2$
$y' = 2x$
$\Uparrow$ $x > 0$ のとき $y' > 0$ となり、$x < 0$ のとき $y' < 0$ となる。これで増減表を書けます。

x	-1		0		2
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	4

上記のように増減表を書けばグラフをかかなくても最大値・最小値を求めることができます。

２次関数の場合、簡単にグラフがかけるので微分して増減表を書くという解法はあまりしません。ですが、数学 III の単元で、最大値・最小値問題がきたらほとんどの場合、微分をして増減表で解いていきます。それでは、問題に進みます。

まず、今回は $f(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{2} + \sin x}$ の最大値・最小値の問題なんだよね。だから、$f(x)$ を微分します。

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\cos x}{\sqrt{2} + \sin x} \\
f'(x) &= \frac{(\cos x)'(\sqrt{2} + \sin x) - \cos x(\sqrt{2} + \sin x)'}{(\sqrt{2} + \sin x)^2} \quad \blacktriangleleft \text{ 商の微分の公式を使った！} \\
&= \frac{-\sin x(\sqrt{2} + \sin x) - \cos x \cdot \cos x}{(\sqrt{2} + \sin x)^2} \\
&= \frac{-\sqrt{2}\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(\sqrt{2} + \sin x)^2} \\
&= \frac{-\sqrt{2}\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(\sqrt{2} + \sin x)^2} \\
&= \frac{-\sqrt{2}\sin x - 1}{(\sqrt{2} + \sin x)^2} \quad \blacktriangleleft\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \text{ より！}
\end{aligned}
$$

とりあえずここまできました。で、微分ってなんのためにしたのかと言うと増減表を書きたいからなんだよね。増減表を書くのに必要なものは、$f'(x)$ の符号（正負）だけです。だから、$f'(x)$ の符号についてだけ考えていきます。

$f'(x) = \dfrac{-\sqrt{2}\sin x - 1}{(\sqrt{2}+\sin x)^2}$ ってなったんだけど、分母の $(\sqrt{2}+\sin x)^2$ は２乗しているんだから０より大きいよね（２乗だけだと０以上と０も含みますが、分母にきている時点で０となることはないです。ですから、$(\sqrt{2}+\sin x)^2$ は０より大きいです。）

ということは、$f'(x) = \dfrac{-\sqrt{2}\sin x - 1}{(\sqrt{2}+\sin x)^2}$ の符号は分子の $-\sqrt{2}\sin x - 1$ の符号と一致します。

今回の問題はまだ一問目で簡単な問題です。そこまで強調しなくても分かる人もいると思いますが、重要なので覚えておいてください。

微分で知りたいのは、$f'(x)$ の符号だけ！

上記のことを徹底的に叩き込んでおいてくださいね。微分して増減表を書くのに必要なものは $f'(x)$ の符号だけです。余計なことは考えないようにしてくださいね。今回の $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{2}\sin x - 1}{(\sqrt{2}+\sin x)^2}$ もそうです。「２乗しているから分母は０より大きいな。なら、$f'(x)$ の符号は分子の符号と一致する。だから、分子の符号だけを考えていけばいいんだな」と考えられるようになっておいてください。

で、ここからは $-\sqrt{2}\sin x - 1$ の符号を調べていきます。このくらいだったら単位円やグラフで頭の中で考えてわかると思います（逆に、すぐにできなければ勉強不足ですよ。数学 III は IA,IIB が理解できていることが前提です。IA,IIB もしっかりとやっておいてくださいね）。

ただ、微分したときの符号の考え方としては次のような便利なものがあります。大学受験の問題では、以下のことを知らないと解けない問題も出てきます。覚えておいてください。

微分の符号の調べ方

$f'(x)$ の符号を調べるとき、$f'(x) = g(x) - h(x)$ と変形して、

２曲線 $y = g(x)$, $y = h(x)$ のグラフの上下関係で $f'(x)$ の符号を調べる方法がある。

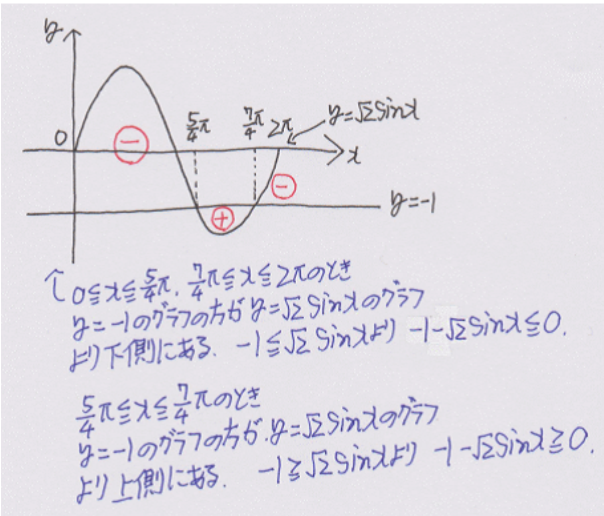
$y = g(x)$ のグラフが $y = h(x)$ のグラフよりも上側にあるとき $g(x) \geqq h(x)$ より $g(x) - h(x) \geqq 0$
$y = g(x)$ のグラフが $y = h(x)$ のグラフよりも下側にあるとき $g(x) \leqq h(x)$ より $g(x) - h(x) \leqq 0$ となります。

今回の場合、$-\sqrt{2}\sin x - 1$ の符号を調べたいんだよね。この部分を強引に $g(x) - h(x)$ の形にします。今回の場合、$-1 - \sqrt{2}\sin x$ とします。

こうすると、$g(x) = -1, h(x) = \sqrt{2}\sin x$ として、２曲線 $y = g(x), y = h(x)$ のグラフの上下関係で $-\sqrt{2}\sin x - 1$ の符号を調べていきます。

もちろん、$-\sqrt{2}\sin x - 1$ で $h(x) = -\sqrt{2}\sin x$ と $g(x) = 1$ で考えてもらってもいいですよ。ただ、$-\sqrt{2}\sin x$ はマイナスがついていて、$\sqrt{2}\sin x$ よりも考えにくいよね。どういうふうに考えてもいいのですが、できるだけ簡単そうなものを使ったらいいですよ。

では、具体的に $-1 - \sqrt{2}\sin x$ の符号をグラフを使って考えていきます。



上記のようにすれば視覚的に判断できるから、$f'(x)$ の符号を簡単に知ることができます。繰り返しになりますが、このグラフの上下関係を使って符号を調べるという方法を知らないと解けない入試問題があります。非常に分かりやすい手法なので、しっかりと理解

しておいてください。

以上より、$f'(x)$ の符号を知ることができたので、増減表を書くことができます。

$$f(0)=\frac{\cos 0}{\sqrt{2}+\sin 0}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f\left(\frac{5}{4}\pi\right)=\frac{\cos\frac{5}{4}\pi}{\sqrt{2}+\sin\frac{5}{4}\pi}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=-1$$

$$f\left(\frac{7}{4}\pi\right)=\frac{\cos\frac{7}{4}\pi}{\sqrt{2}+\sin\frac{7}{4}\pi}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=1$$

$$f(2\pi)=\frac{\cos 2\pi}{\sqrt{2}+\sin 2\pi}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

x	0		$\frac{5}{4}\pi$		$\frac{7}{4}\pi$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

増減表がかければ、最大値・最小値は簡単に分かるよね。今回の場合増減表の増減だけから判断すると最大値となる可能性のあるものは $x=0$ のときの $\frac{1}{\sqrt{2}}$ と $x=\frac{7}{4}\pi$ のときの 1 ですが、$\frac{1}{\sqrt{2}}<1$ より最大値は 1 です。

同様に、最小値となる可能性のあるものは $x=\frac{5}{4}\pi$ のときの -1 と $x=2\pi$ のときの $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ですが、$-1<\frac{1}{\sqrt{2}}$ より最小値は -1 です。

【問題３９の解答】

$$f(x)=\frac{\cos x}{\sqrt{2}+\sin x}$$

$$f'(x)=\frac{(\cos x)'(\sqrt{2}+\sin x)-\cos x(\sqrt{2}+\sin x)'}{(\sqrt{2}+\sin x)^2}$$ ◀ 商の微分の公式を使った！

$$=\frac{-\sin x(\sqrt{2}+\sin x)-\cos x\cdot\cos x}{(\sqrt{2}+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}\sin x-\sin^2 x-\cos^2 x}{(\sqrt{2}+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}\sin x-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{(\sqrt{2}+\sin x)^2}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}\sin x-1}{(\sqrt{2}+\sin x)^2}$$ ◀ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ より！

$f'(x)=0$ のとき、$x=\frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$ となる。

x	0		$\frac{5}{4}\pi$		$\frac{7}{4}\pi$		2π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	↘	-1	↗	1	↘	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

増減表より、$x=\frac{7}{4}\pi$ のとき最大値 **1**、$x=\frac{5}{4}\pi$ のとき最小値 **−1** をとる。

＊グラフを使って $f'(x)$ の符号を調べました。このぐらいでしたら答案に何も書かずにいきなり増減表を書いてもらってＯＫです。ただ、教科書などでは上記のように $f'(x)=0$ となるとき … と書いてから増減表をかくことが多いみたいです。

ただ、個人的には $f'(x)=0$ となる値が分かっても $f'(x)$ の符号が分かるわけではないのに、なんでこんな書き方をするのかな？なんて思います。教科書と同じように書いてお

けば無難です。まあ、そんなものです。

グラフで符号を調べるときも、強調するときは答案にしっかりとかいておかないといけません。ただ、今回ぐらいなら何もかかずにいきなり増減表を書いても大丈夫です。