

問題

分母が2の累乗、分子が奇数であって、0より大きく1より小さい分数を次のように並べた数列を考える。

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16}, \frac{1}{32}, \frac{3}{32}, \frac{5}{32}, \dots$$

以下の問いに答えよ。

- (1) $\frac{1}{2^8}$ は第何項であるか。
- (2) 第255項を求めよ。
- (3) 初項から第255項までの和を求めよ。

この問題は、北見工業大学の2008年の過去問です。

群数列に関する問題です。普段、高校生に勉強を教えていても群数列のことが分からないと言っている人が本当に多いです。群数列は、実はワンパターンで解けてしまいます。慣れるまでは、何をやっているのか分からず少し大変かもしれませんが、一度理解してしまうと簡単です。

群数列は、こちらの解法に従って解いていきます。今回のプリントを見る前に、群数列の解説プリント <http://www.hmg-gen.com/tecni2b-10.pdf> を見てから、問題を解くようにしてください。

解説

まずは、群数列の問題なので設問に入る前に、群数列のワンパターン解法に従って準備をしておきたいと思います。

群数列の解法

- (Step1) a_n を求められるときは、 a_n を求める
- Step2 第 n 群に含まれる項数を求め、それを b_n とする
- Step3 $\sum_{k=1}^n b_k$ を計算する。その値が第 n 群の末項の項数と一致する

(Step1) a_n を求められるときは、 a_n を求める

今回の群数列は、 a_n で表すことはできません。ですから、この Step1 は省略します。

Step2 第 n 群に含まれる項数を求め、それを b_n とする

第 n 群に含まれる項数ですが、今回の群数列にはまだしきりがついていないので、まずはしきりを自分でつけていきます。

群数列は、最初からしきりが与えられている問題と、今回の問題のようにしきりが与えられていない問題とがあります。そういった場合は、まずは自分でしきりをつけてから考えていきます。といっても、ほとんどの問題でしきりの位置は簡単に見つけることができますよ。今回は、分数の値が変わるところにしきりを入れていきます。

$$\frac{1}{2} \mid \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \mid \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} \mid \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16} \mid \frac{1}{32}, \frac{3}{32}, \frac{5}{32}, \dots$$

しきりをつけたので、Step2 の第 n 群に含まれる項数を求めていきたいと思います。第 1 群に含まれる項数は 1 個、第 2 群に含まれる項数は 2 個、第 3 群に含まれる項数は 4 個、第 4 群に含まれる項数は 8 個、これで分かると思うけど、第 n 群に含まれる項数 b_n は $b_n = 2^{n-1}$ だよな？これで、Step2 が終わったので、Step3 に進みたいと思います。

Step3 $\sum_{k=1}^n b_k$ を計算する。その値が第 n 群の末項の項数と一致する

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n 2^{k-1} &= \frac{2^n - 1}{2 - 1} \quad \leftarrow \text{初項 1、公比 2 の等比数列第 } n \text{ 項までの和より} \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

これで、第 n 群の末項の項数が $2^n - 1$ ということがわかりました。これで、準備が終わったので実際に設問を解いていきたいと思います。

(1) 「 $\frac{1}{2^8}$ は第何項であるか」という問いですが、まず $\frac{1}{2^8}$ って第 8 群の初項だよな？第 8 群の項数は、第 7 群の項数に 1 を加えたものです。

Step3 より、第 n 群の末項の項数は $2^n - 1$ です。これより第 7 群の末項の項数は $2^7 - 1 = 127$ となります。よって、第 8 群の初項は第 128 項目となります。

これで設問 (1) が終了です。簡単だよな？それでは、設問 (2) に進みます。

(2) 「第 255 項を求めよ」

いきなり第 255 項を求めることはできないので、まず第 255 項は第何群の第何項目かということをもまずは求めていきたいと思います。

Step3 で求めた $2^n - 1$ が第 n 群の末項の項数です。この $2^n - 1$ に $n = 8$ を代入すると $2^8 - 1 = 255$ となります。ということは第 255 項は、第 8 群の末項ということになります。

Step1 で a_n は求めることができないという話をしましたが、全体の a_n を求めることはできませんが、それぞれの群の中では求めることができます。

第 n 群の第 k 項目であれば、 $\frac{2k-1}{2^n}$ で表すことができます。分子は初項 1、公差 2 の等差数列ということを考えれば当然 (分子) = $2k - 1$ となり、分母は第 1 群は 2^1 、第 2 群は 2^2 、第 3 群は 2^3 となっていることより 2^n と予想できます。よって、第 n 群の第 k 項目は $\frac{2k-1}{2^n}$ となります。

第 255 項は第 8 群の末項です。Step2 より、第 n 群には 2^{n-1} 個の項数が含まれているので、第 8 群には $2^{8-1} = 2^7 = 128$ 項が含まれています。

ということは、第 8 群の末項は第 8 群の第 128 項目ということになります。これを先ほど求めた、第 n 群の第 k 項目の項数であれば、 $\frac{2k-1}{2^n}$ に $n = 8$, $k = 128$ をそれぞれ代入すると、 $\frac{2 \cdot 128 - 1}{2^8} = \frac{255}{256}$ となり、これが答えとなります。次に (3) に進みます。

(3) 「初項から第 255 項までの和を求めよ」

先ほどの設問で第 255 項目は第 8 群の末項ということが分かりました。ということは、「初項から第 255 項までの和」は、第 1 群から第 8 群までの項数の和を求めたいこととなります。

では、まずは第 n 群に含まれる項数の和を求めることにします。

第 n 群を書き出すと、

$$\frac{1}{2^n}, \frac{3}{2^n}, \dots, \frac{2k-1}{2^n} \quad \text{ただし、} k = 2^{n-1}$$

$k = 2^{n-1}$ は、Step2 の b_n よりきています。

これより、第 n 群の和は

$$\frac{1}{2^n} + \frac{3}{2^n} + \cdots + \frac{2k-1}{2^n}$$

$$= \frac{1+3+\cdots+2k-1}{2^n}$$

ただし、 $k = 2^{n-1}$ となります。

ここから、上記の計算をしていくのですが、分子の $1+3+\cdots+2k-1$ は単なる等差数列です。初項 1、公差 2 の等差数列第 k 項までの和ですから、等差数列の和の公式より $\frac{k}{2}\{2 \cdot 1 + (k-1)2\} = k^2$ となります。 $k = 2^{n-1}$ ということを考え $k^2 = (2^{n-1})^2 = 2^{2n-2}$ となります。

以上のことより、第 n 群に含まれる項数の和は $\frac{2^{2n-2}}{2^n} = 2^{n-2}$ となります。

第 n 群に含まれる項数の和は 2^{n-2} となるので、第 8 群までの項数の和は当然 $\sum_{k=1}^8 2^{k-2}$ で求めることができます。

ここまで少しこまごまとした式変形が多く、ややこしく感じたかもしれませんが、やっている内容としてはごくごく簡単なものです。しっかりと理解しておいてください。それでは、解答に進みます。

【解答】

$$\frac{1}{2} \mid \frac{1}{4}, \frac{3}{4} \mid \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8} \mid \frac{1}{16}, \frac{3}{16}, \frac{5}{16}, \frac{7}{16}, \frac{9}{16}, \frac{11}{16}, \frac{13}{16}, \frac{15}{16} \mid \frac{1}{32}, \frac{3}{32}, \frac{5}{32}, \dots$$

のようにしきりをつけて、分母が 2^n である部分を第 n 群とする。

第 n 群に含まれる項数は 2^{n-1} 個。よって、第 n 群の末項の項数は $\sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 2^n - 1$ となる。

(1) $\frac{1}{2^8}$ は第 8 群の初項である。

第 7 群の末項は第 $2^7 - 1 = 127$ 項目。

よって、 $\frac{1}{2^8}$ は第 128 項である。

(2) 第 2 5 5 項は、第 8 群の第 1 2 8 項である。

第 n 群の第 k 項は $\frac{2k-1}{2^n}$ で表されるので、第 2 5 5 項は $\frac{2 \cdot 128 - 1}{2^8} = \frac{255}{256}$ となる。

(3) 第 n 群に含まれる項の和は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^n} + \frac{3}{2^n} + \cdots + \frac{2 \cdot 2^{n-1} - 1}{2^n} \\ &= \frac{1 + 3 + \cdots + 2 \cdot 2^{n-1} - 1}{2^n} \\ &= \frac{\frac{2^{n-1}}{2} \{2 \cdot 1 + (2^{n-1} - 1)\}}{2^n} \\ &= \frac{2^{2n-2}}{2^n} \\ &= 2^{n-2} \end{aligned}$$

よって、第 8 群までの項数の和は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^8 2^{k-2} &= \frac{\frac{1}{2} (2^8 - 1)}{2 - 1} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 255 \\ &= \frac{255}{2} \end{aligned}$$

以上より、求める初項から第 2 5 5 項までの和は $\frac{255}{2}$ となる。

今回の問題はどうかだったでしょうか？ 指数の計算やシグマの計算を扱いこなせないと少しややこしかったかもしれませんが、入試問題としてはごくごく簡単な問題です。群数列は、本当にワンパターンで解けてしまうので、しっかりと理解しておいてください。

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

メールはコチラまで (何か言ってくれと嬉しいです)

magdai@hmg-gen.com/