

質問内容

$$\int_0^3 |x-1| dx \text{ ってどう解けばいいですか？}$$

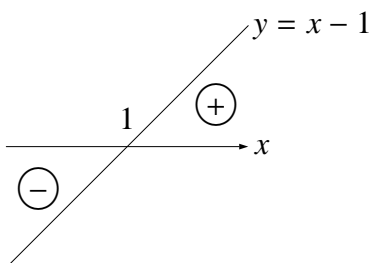
そうですね、少し考えにくいですよ。ひとつずつ丁寧に理解していきましょう。

まず、絶対値についてですが、以下は知っていると思いますが、一応書いておきます。

絶対値の外し方

$$|A| = \begin{cases} A & (A \geq 0) \\ -A & (A < 0) \end{cases}$$

今回の問題は、インテグラルの中に絶対値を含んでいるから絶対値を外さないといけません。



↑ 絶対値を外すにはグラフをかくのが一番分かりやすいです。絶対値の中身のグラフをかいて、 x 軸より上側にある範囲が正、 x 軸より下側にある範囲が負となります。

今回は絶対値の中身が $x-1$ と 1 次関数でわざわざグラフをかかなくても分かる人も多いと思いますが、グラフをかい方が分かりやすいという説明のためにわざわざグラフをかきました。

上記より、 $x < 1$ のとき、 $x-1 < 0$ なので $|x-1| = -(x-1)$ となり、 $x \geq 1$ のとき、 $x-1 \geq 0$ のとき $|x-1| = x-1$ となります。

今回の問題では、積分区間が 0 から 3 までなのでこれと合わせると、 $0 < x < 1$ のときは $|x-1| = -(x-1)$ となり、 $1 \leq x < 3$ のときは $|x-1| = x-1$ となります。

以上のことをふまえて解答に移ります。

【解答】

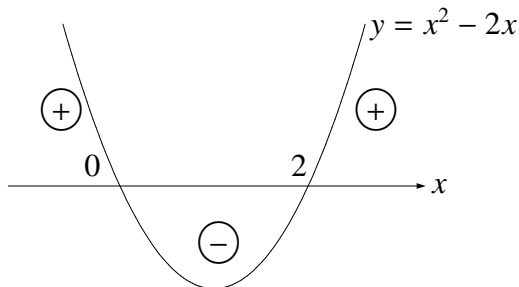
$$\begin{aligned} & \int_0^3 |x-1| dx \\ &= \int_0^1 |x-1| dx + \int_1^3 |x-1| dx \quad \blacktriangleleft \int_a^b \{f(x) + g(x)\} dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \text{ より} \\ &= \int_0^1 -(x-1) dx + \int_1^3 (x-1) dx \\ & \quad \uparrow 0 < x < 1 \text{ では } |x-1| = -(x-1)、1 \leq x < 3 \text{ では } |x-1| = x-1 \text{ より} \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2 + x \right]_0^1 + \left[\frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^3 \\ &= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{9}{2} - 3 - \frac{1}{2} + 1 \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

では、今回の練習問題としてもう1問解いてもらいます。今回は、絶対値の中身が2次関数のときです。さきほどの1次関数のときと同じように解いていけばいいだけです。

問題

$$\int_1^3 |x^2 - 2x| dx \text{ を計算せよ}$$

今回も、先ほどと同じように絶対値の中身のグラフをかいて、まずは正負を考えます。



$\uparrow x < 0$ で $x^2 - 2x > 0$ 、 $0 < x < 2$ で $x^2 - 2x < 0$ 、 $x > 2$ で $x^2 - 2x > 0$ となる。

積分区間が1から3ということを考え、 $1 < x < 2$ では $x^2 - 2x < 0$ 、 $2 \leq x < 3$ では $x^2 - 2x \geq 0$ となるので、これを使い絶対値を外し計算していきます。

【解答】

$$\begin{aligned} & \int_1^3 |x^2 - 2x| dx \\ &= \int_1^2 -(x^2 - 2x) dx + \int_2^3 (x^2 - 2x) dx \\ &= \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3 - x^2 \right]_2^3 \\ &= 4 - \frac{8}{3} - 1 + \frac{1}{3} + 9 - 9 - \frac{8}{3} + 4 \\ &= 7 - \frac{15}{3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

今回話した絶対値を含んだ積分ですが、数学Ⅱで出題されることがありますが、より多く出題されるのは数学Ⅲです。数学Ⅲになると、文字を含んで場合分けが必要になったりして複雑になりますが、基本的には今回の内容を理解しておけば大丈夫です。重要なところなので、しっかりと理解しておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値45から55！高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com