

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

質問内容

積分の面積の求め方の意味がいまいち分かりません。どうゆう意味ですか？

回答

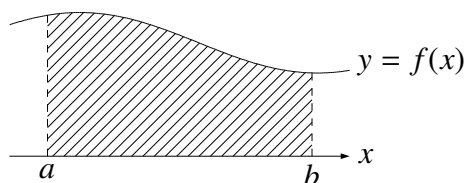
積分の面積はしっかりと理解できている人が本当に少ないです。文系の人は何となく解くだけでも大丈夫かもしれませんが、理系の人には積分の意味を知っておかないと数学IIIの積分になると少し厳しいです。

「積分の面積」と言えば難しそうに聞こえますが、ごくごく簡単な内容で中学生(小学生?)でも理解できるような内容です。文系の人でも毛嫌いせずに読んでください。

【注】

今から話す内容は、厳密に言えば少しおかしい部分もあります。ですが、高校数学の積分は教科書でもすごくあいまいなんです。

大学に入ってから勉強するしっかりとした数学から言えば、おかしい部分もあります。あくまで、大学受験までは、このプリントで解説している内容で十分ですよ。



上図斜線部の面積が $S = \int_a^b f(x) dx$ になるということは知っている人が多いと思います。

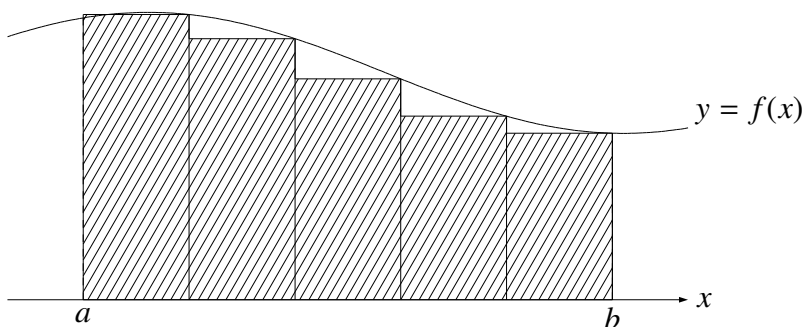
今日は、なぜ上図の面積が $S = \int_a^b f(x) dx$ で表されるのか、説明したいと思います。

まず、これまでのことを思い出してほしいんですが、小学校や中学校で図形の面積を求めてきたと思うけど、長方形や台形、円といったきれいな形の図形しか求めることができなかったよね。だから、上の図みたいな変わった形の面積はこれまでの知識では求めることができない。

積分っていえば、新たな面積の公式と思っている人もいるけどけっしてそうではないよ。あくまで積分は近似的に面積を求めているだけです。

上図の斜線部は変わった形をしているので、面積を直接求めることはできません。そこで、面積を近似的に求めていこうというのが積分の考えです。

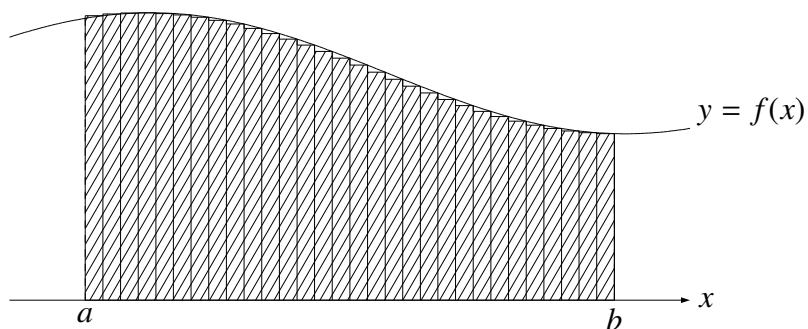
上図を下図のように長方形で分割します。



上図は、横の長さの等しい長方形にしてあります。長方形だったら(縦) \times (横)で面積が求められるから、上図斜線部の面積はひとつずつの長方形の面積は求めることができる。それらの面積を足し合わせていいたら斜線部全体の面積を求めることはできます。

でも、この斜線部の面積は求めたい斜線部の面積になるか？と言えば白い部分が足されていないから求めたい斜線部の面積より小さくなっちゃいます。

さきほどは長方形の横の長さが長かったから、長方形の面積の和と求めたい図形との面積の差がありました。でも、長方形の横の長さをどんどん短くしていったら長方形の面積の和と求めたい部分の面積の差もどんどん小さくなるよね。

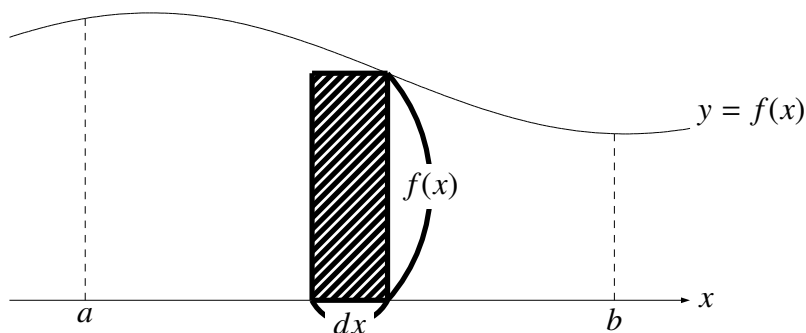


これは、さっきより長方形の横の長さを短くした図だけど、これだったら長方形の面積の和と求めたい斜線部の面積の差の部分はほとんどなくなってきたんじゃない？。さらに、どんどん長方形の横の長さを短くしていったら、もう面積の差はなくなるよね。

このことより横の長さがすごく短い時(微小なとき)、長方形の面積の和と斜線部の面積は等しくなると考えることができます。

少し適当な表現でしたが、積分の面積はこういうふうに横の長さが微小な長方形の面積の和で斜線部全体の面積を求めている訳です。

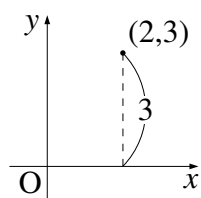
では、ひとつの微小区間の面積を求めていきます。普通によく目に見えないので少し大きさにかいてあります。



上図のように縦の長さが $f(x)$ で横の長さが dx になるっていうことは分かる？ちなみに dx とは d で微小な (むちゃくちゃ小さい) という意味を表します。 dx とは x の長さがむちゃくちゃ小さいということです。

縦の長さが $f(x)$ になるのは、 $y = f(x)$ から x 軸に下ろした垂線の長さだから当然 $f(x)$ だよな？

例えば $(2, 3)$ という点から x 軸に下ろした垂線の長さは



$(2, 3)$ から x 軸に下ろした垂線の長さは $(2, 3)$ の y 座標の 3 から x 軸の y 座標の 0 を引いた $3 - 0 = 3$ となります。高さを求めるには y 座標の大きい方から小さい方を引くことで求めることができます。(← 当たり前だよな？数直線における距離は大きい方から小さい方を引いたと思うけど、それと同じです)

ひとつの微小区間の面積 dS は $dS = f(x) dx$ ◀ (長方形の面積)=(縦) \times (横) より となります。

ここから積分が出てくるのですが、積分とは足し合わせるということを意味します。先ほど話したように横の長さが微小な長方形の長さを足し合わせたら全体の面積と等しくなります。

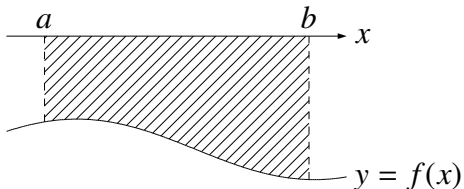
だから、全体の面積 S は

$$S = \int dS \quad \leftarrow \text{微小区間の面積 } dS \text{ を足し合わせたら全体の面積が求められる}$$
$$= \int_a^b f(x) dx \quad \leftarrow ds = f(x) dx \text{ を代入した。}$$

となります。

これで、積分の面積の求め方はすべて説明がつきました。積分の面積の求め方はまず微小区間の面積を求めて、あとはそれを積分する(足し合わせる)だけです。これさえ理解しておけば、3年生で勉強をする体積の求め方も簡単に理解することができます。それでは、面積で違ったパターンのものを解説していきます。

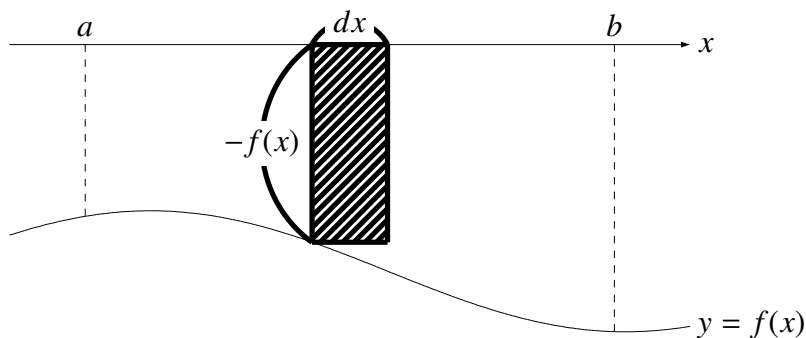
先ほどは、 $y = f(x)$ が x 軸より上にあったときです。今度は $y = f(x)$ が x 軸より下側にあるときです。



上図のときの斜線部の面積を求めていきます。 x 軸より下側にあるから $S = \int_a^b -f(x) dx$ なんて公式で覚えている人がいるけど、さっき説明したことが理解できているとこんなのはもう必要ないよね？

微小区間の長方形の面積が分かると全体の面積を求めることができるんだから、微小区間の長方形の面積さえ求まれば OK です。

では、このとき微小区間の面積はどうなるか考えていきます。



横の長さは微小な長さなので dx です。次に縦の長さですが今回は $f(x)$ は x 軸よりも下側にあるので長さは $-f(x)$ となります。

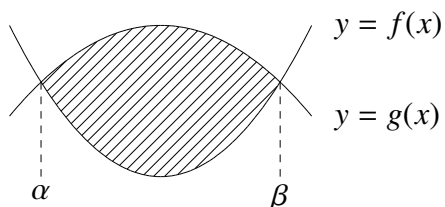
長さの別な求め方として、長さは上から下を引けばいいので今回は上の y 座標は x 軸上なので 0 、下の y 座標は $f(x)$ なので、上から下を引いて $0 - f(x) = -f(x)$ と考えてもらってもいいです。

これより微小区間の面積 dS は $dS = -f(x) dx$ ◀ (長方形の面積)=(縦)×(横) より となります。

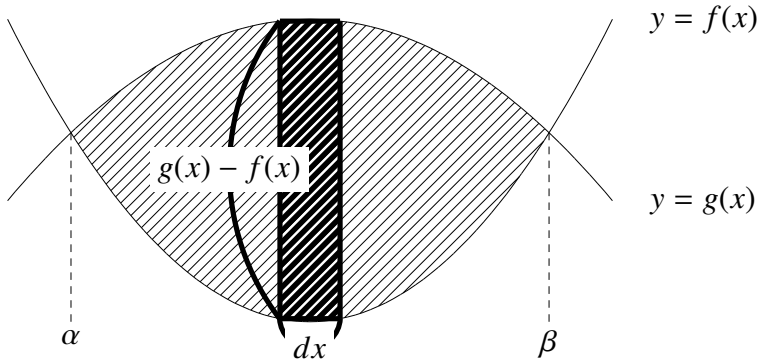
よって、求める面積 S は $S = \int_a^b -f(x) dx$ となります。

「微小区間の面積を足し合わせる」ということが理解できたらもう簡単だよな？面積の最後として、2つの関数によって囲まれた部分の面積の求め方を解説します。

次の斜線部の面積を求めていきます。



これも先ほどと同じように斜線部の微小区間の面積を求めたらいいだけです。



上図のようになるので微小な長方形の高さは $g(x) - f(x)$ で横の長さは dx となります。よって面積 dS は $dS = \{g(x) - f(x)\} dx$ ◀ (長方形の面積)=(縦)×(横) より です。

高さが $g(x) - f(x)$ になるのはもう大丈夫だよね。高さは大きい方から小さい方をひけば求まるんだから、今回は $g(x)$ の方が $f(x)$ よりも大きいので $g(x) - f(x)$ となります。

高さは上から下を引くと覚えておいてもらえば大丈夫だと思います。

ですから、上図斜線部の面積 S は $S = \int_{\alpha}^{\beta} \{g(x) - f(x)\} dx$ となります。

今回解説したように面積は公式ではありません。微小区間の面積を足し合わせていって全体の面積を求めているんです。こう理解すれば、公式など覚えずに面積を求められると思います。

これで、今回の積分の面積の意味に関するプリントは終わりにします。「積分はとにかく微小区間を足し合わせて全体を作るんだ」ということをしっかりと理解しておくようにしてください。

数学 III になるとバームクーヘン型積分など、これよりさらに複雑な積分が出てきますが、今回の内容を理解していさえすれば簡単です。積分は理系の人にとっては最重要単元なのでしっかりと理解しておいてください。

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあつてそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」→「入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格!」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格!」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールが分かれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

ツイッターやっています。

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司