

質問内容

整式  $f(x)$  が  $x - \alpha$  で割り切れるとき、 $f(\alpha) = 0$  となるって問題集に書いてあったんですけど、理由を教えてくださいませんか？

これって因数定理と呼ばれるもので、難しそうに感じるかもしれませんが理由はいたってシンプルですよ。簡単に説明をしますが、その前に因数定理についてまとめておきます。

因数定理

整式  $f(x)$  が  $x - \alpha$  で割り切れるとき、 $f(\alpha) = 0$  となる。

では、簡単になぜ因数定理が成立するか話していきます。

まず整式を  $x - \alpha$  で割ったときの商を  $Q(x)$ 、余りを  $r$  とすると、 $f(x) = (x - \alpha)Q(x) + r$  が成立します。割り切れるときは余りが 0 となるときなので、この式に  $r = 0$  を代入すると

$f(x) = (x - \alpha)Q(x)$  となります。この式に  $x = \alpha$  を代入すると

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= (\alpha - \alpha)Q(\alpha) \\ &= 0 \cdot Q(\alpha) \leftarrow \alpha - \alpha = 0 \text{ より} \\ &= 0 \leftarrow Q(\alpha) \text{ の値は分からないが、} 0 \text{ をかけたら当然 } 0 \text{ となる} \end{aligned}$$

$\therefore f(\alpha) = 0$   $\leftarrow$  因数定理が導けた！

因数定理の理由は簡単だよな？では 2 問ほど因数定理を使った問題を解いてもらいます。

練習問題 1

整式  $x^2 + ax + 2$  は  $x - 1$  で割り切れる。このとき  $a$  の値を求めよ

【解説】

この問題は、単純に因数定理にあてはめるだけです。 $f(x) = x^2 + ax + 2$  とすると因数定理より  $f(1) = 0$  が成立します。

【解答】

$f(x) = x^2 + ax + 2$  とする。 $x - 1$  で割り切れるので因数定理より  $f(1) = 0$  が言える。

$$f(1) = 1^2 + a \cdot 1 + 2 = 0$$

$$1 + a + 2 = 0$$

$$a = -3 \quad \blacktriangleleft \text{これが答え}$$

因数定理を使えばいいだけの問題なので簡単だったよね。では、もう一問因数定理を使って解く問題を解いてください。

練習問題 2

整式  $x^3 + 2x^2 + ax + b$  は  $x - 2$  でも  $x + 3$  でも割り切れる。このとき  $a, b$  の値を求めよ。

【解説】

これも因数定理を使って解くだけなんですけど、 $x + 3$  の方は間違いやすいので注意して下さい。因数定理は  $x - \alpha$  のとき  $f(\alpha) = 0$  です。

$x + 3$  はプラスの形になっていて因数定理を使うにはマイナスの形になっていないとダメなので  $x + 3 = x - (-3)$  と式変形をしてから、因数定理  $f(-3) = 0$  を使って解いていきます。因数定理はマイナスの形にしてから解くということを覚えておいてください。

【解答】

$f(x) = x^3 + 2x^2 + ax + b$  とする。

$f(x)$  は  $x - 2$  で割り切れるので、因数定理より  $f(2) = 0$  が成立する。

$$f(2) = 2^3 + 2 \cdot 2^2 + 2a + b = 0$$

$$2a + b = -16 \cdots \textcircled{1}$$

$f(x)$  は  $x + 3$  で割り切れるので、因数定理より  $f(-3) = 0$  が成立する。

$$f(-3) = (-3)^3 + 2 \cdot (-3)^2 - 3a + b = 0$$

$$-3a + b = 9 \cdots \textcircled{2}$$

① - ② より

$$2a + b = -16$$

$$\rightarrow -3a + b = 9$$

$$\hline 5a = -25$$

$$a = -5$$

$a = -5$  を①に代入して  $2 \cdot (-5) + b = -16$  より  $b = -6$

以上より、 $a = -5, b = -6$  ◀ **これが答え**

今回のプリントはこれで終わりです。因数定理は間違いやすいのでしっかりと理解しておいてください。それでは、がんばってください。

河見賢司

目指せ偏差値 45 から 55 ! 高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください (何か言ってもらえると嬉しいです)

[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)