

「ルールが分かれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<http://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

質問内容

数列の漸化式の特性方程式について教えてください。特性方程式を使えば問題を解けることは分かりますが、なぜ特性方程式を使うとうまくいくか理解したいです。

そうですね。確かになぜ「特性方程式で解くとうまくいくか理解できない…」結論からいうとまあ、理解しなくても特性方程式を使えば解けてしまうので、なぜ特性方程式が成立するかなんて理解しなくてもよい訳ですが、とりあえず解説をすることにします。

特性方程式 その1

$a_{n+1} = A a_n + B$ は、 $\alpha = A\alpha + B$ を満たす α を求め、 $a_{n+1} = A a_n + B$ の両辺から α を引くと $a_{n+1} - \alpha = A(a_n - \alpha)$ となる。

上記の青い部分 $\alpha = A\alpha + B$ が特性方程式と言われているところです。両辺から α をひくと、なぜかうまい具合に等比数列になってくれるんですよね。今から、なぜうまくいくかということを解説します。

まず、 $a_{n+1} = A a_n + B \cdots ①$ が $a_{n+1} - \alpha = A(a_n - \alpha) \cdots ②$ と変形できるとします。

② を変形して $a_{n+1} =$ の形にもっていきます。

$$② \Leftrightarrow a_{n+1} - \alpha = A(a_n - \alpha)$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= A(a_n - \alpha) + \alpha \\ &= A a_n - A\alpha + \alpha \end{aligned}$$

① と ② は等しいので当然 ① の $a_{n+1} = A a_n + B$ と ② の $a_{n+1} = a_n - A\alpha + \alpha$ の赤い部分同士は等しくなります。これより、 $B = -A\alpha + \alpha$ が成立します。この式を変形すると $\alpha = A\alpha + B$ が成立します。青い部分 $\alpha = A\alpha + B$ は特性方程式です。よって、これで特性方程式を導くことができました。

特性方程式 その2

$a_{n+2} + A a_{n+1} + B a_n = 0$ は x についての2次方程式 $x^2 + Ax + B = 0$ の2解を α, β とすると

2つの式 $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$ と $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n)$ が成立する

上記の青い部分が特性方程式と呼ばれるものです。

これから、なぜ成立するかということをお話していきます。方針は特性方程式その1のときと同じです。

とりあえず $a_{n+2} + A a_{n+1} + B a_n = 0 \cdots \textcircled{1}$, $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n) \cdots \textcircled{2}$, $a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha(a_{n+1} - \beta a_n) \cdots \textcircled{3}$ とする。これから $\textcircled{2}$ を式変形していきます。

$$\textcircled{2} \Leftrightarrow a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$$

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta a_{n+1} - \alpha \beta a_n$$

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} - \beta a_{n+1} + \alpha \beta a_n = 0$$

$$a_{n+2} - (\alpha + \beta) a_{n+1} + \alpha \beta a_n = 0$$

ここで $\textcircled{1}$ の $a_{n+2} + A a_{n+1} + B a_n = 0$ と $\textcircled{2}$ の $a_{n+2} - (\alpha + \beta) a_{n+1} + \alpha \beta a_n = 0$ の青い部分と赤い部分同士は等しいので、 $\alpha + \beta = -A$, $\alpha \beta = B$ が成立します。

これで、もうほとんど終わりなんだけど、 $\alpha + \beta = -A$, $\alpha \beta = B$ より α, β を2解とするような x についての2次方程式は $x^2 + Ax + B = 0$ になるよね？これで特性方程式が導かれました。 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{3}$ についてもやってもらってもいいですが、これもほとんど同じになるので省略することにします。

それから、ちょっと前に書いた「 α, β を2解とするような x についての2次方程式は $x^2 + Ax + B = 0$ になる」この部分が分からないというひとがたまにいますが、これはただ単に解と係数の関係ですよ。もし分からない人は $x^2 + Ax + B = 0$ の2解を α, β として解と係数の関係で確認してください。

これで今回の解説プリントは終わりです。冒頭の繰り返しになりますが、特性方程式がなぜ成立するか理解できていなくても問題自体は解くことができます。ただ、「どうしてそうなるの？」と気になる人や数学本来の意味を考えると、理解しておいた方がいいで

すよね。それでは、頑張ってください。

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあつてそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」→「入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格!」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格!」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

**ルールが分かれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ**

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com