

高校2年生、I君からの質問です。

質問内容

相加相乗平均を使って最大値・最小値問題を解いていくって聞いたんですけど、実際どうやって相加相乗平均を使って解いていくのですか？学校では、相加相乗平均は不等式の証明くらいでしか使ったことがないんですけど。

回答

そうなんですよね。I君の学校に限らず、相加相乗平均は適当にしか説明しない学校が本当に多いんです。でも、相加相乗平均は頻出なんです。

相加相乗平均を知らないという人は、まずは次のことを覚えてください。

相加・相乗平均

$a > 0, b > 0$ のとき、 $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ が成立する。等号は $a = b$ のとき成立。

相加相乗平均の証明は簡単にできますよ。

【証明】

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) - (\text{右辺}) &= a + b - 2\sqrt{ab} \\ &= (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0\end{aligned}$$

等号は $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 0$ つまり $a = b$ のとき //

実際の大学受験の問題で、相加相乗平均が不等式の証明として使われることはごくごくわずかで、相加相乗平均は不等式の証明で使うのではなく、相加相乗平均を使って関数の範囲を求めることに使います。

関数の範囲が求められたら、最大値、最小値が求められたことになるよね。ですから、相加相乗平均は最大値、最小値問題を解くことに使うことが多いです。

特に、分数関数の最大値・最小値問題では相加相乗平均を使って解くことが本当に多いです。

一般的に、関数の最大値・最小値問題はグラフをかいて解いていくことが基本です。ですが、分数関数のグラフをかくためには数学IIIの知識が必要になります。そこで、数学IIBまでの範囲で分数関数の最大値・最小値問題が出てきたときは、まずは相加相乗平均を

使えるのではないかと疑うようにしてください。

もちろん、分数関数だからといって絶対に相加相乗平均を使って解いていくわけではありませんが、大学受験の問題では特に、分数関数の最大値・最小値問題は相加相乗平均を使って解いていく割合が圧倒的に高いように感じます。

では、実際にどうやって相加相乗平均を使って最大値・最小値問題を解いていくのか解説していきます。

まずは、一番簡単な問題です。

問題 1

$x > 0$ のとき $x + \frac{1}{x}$ の最小値を求めよ。

【解説】

よく分からないけど、相加相乗平均を使ってみます。

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

$x + \frac{1}{x} \geq 2$ となっていることから $x + \frac{1}{x}$ は 2 以上となるよね。だから、 $x + \frac{1}{x}$ の最小値は 2 となります。

ここでちょっと注意しないといけないんだけど、先ほど $x + \frac{1}{x} \geq 2$ より $x + \frac{1}{x}$ の最小値は 2 と言ったけど、これは一般には言えないことなんです。

例えば、 $x + \frac{1}{x}$ の最小値が 3 だったとしても、 $x + \frac{1}{x} \geq 2$ というのは成立しているよね？ $x + \frac{1}{x} \geq 2$ が言えて、かつ $x + \frac{1}{x} = 2$ となるような x が存在してはじめて最小値が 2 ということと言えます。

相加相乗平均をはじめ、不等号を使って最大値や最小値を求めていく問題があります。イコールとなる x が存在してはじめてそれが最大値や最小値ということが言えるんですが、まず間違いなくといっていいほどイコールとなる x が存在してくれています(そうでないと問題が解けない)。

でも、解答を書くときは、必ずイコールが成立する x が存在するから、という一言を書かないと大幅に減点されます。注意してください。

【解答】

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

等号は $x = \frac{1}{x}$ つまり $x = 1$ のとき成立するので、 $x + \frac{1}{x}$ の最小値は2である。

では、次の問題に進みます。

問題 2

$x > 0$ のとき $\frac{2x}{x^2 + x + 1}$ の最大値を求めよ。

【解説】

これは分数関数の最大値、最小値問題だね。さっきも少し説明したけど、分数関数の最大値、最小値問題のほとんどは相加相乗平均で解いていきます。

相加相乗平均は $a > 0, b > 0$ という条件が必要でした。分数関数の最大値、最小値問題で文字に正という条件がついているときはまず相加相乗平均で解いていくと思ってもらってかまいません。

慣れてくると相加相乗平均が使えるかどうか、すぐに判断できるようになりますが最初のうちは、なかなか分からないと思うので「相加相乗平均ができるのかな?」と考えてとりあえず相加相乗平均で解いていってみて、それで解けないようなら他の解法を考えるようにしてください。

分数関数の問題で、相加相乗平均を使うポイントですが、分母分子を適当なもので割ることにより、分母または分子を数字のみにします。そうすると、相加相乗平均が使える問題の場合、分母または分子が相加相乗平均が使える形になってくれるはず。分母または分子を数字のみにすると先ほど言いましたが、ほとんどの場合で分子が数字のみ(定数)になり、分母が相加相乗平均が使えるパターンになります。

今回の問題では、 $\frac{2x}{x^2 + x + 1}$ ですが、分母分子を x で割ると分子の $2x$ が2になってくれるので、分母分子を x で割る方向で考えていきます。

文字(変数)で割るときは0になるかどうか考えないといけません。今回は $x > 0$ という条件が与えられていて x は0になることがないのでそのまま x で割ってもらってかまいません。

$$\frac{2x}{x^2+x+1} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{2}{x+1+\frac{1}{x}} \text{ となります。}$$

とりあえず分子の変数をなくすために分母分子を x で割ったけど、こうすることによって分母が相加相乗平均を使える形になったよね。

$$(\text{分母}) = x + \frac{1}{x} + 1 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} + 1 = 3$$

相加相乗平均を使ったら (分母) ≥ 3 になったんだから、分母の最小値は3になります。

これで $\frac{2}{x+1+\frac{1}{x}}$ は分母分子ともに正の値しかとらなくて分子は2で一定なんだから、

当然分母が最小になるときに分数全体からみたら最大となるよね。

このことを踏まえて $\frac{2}{x+1+\frac{1}{x}}$ の最大値は $\frac{2}{3}$ となります。

【解答】

$$\frac{2x}{x^2+x+1} = \frac{2}{x+1+\frac{1}{x}} \quad \leftarrow \text{分母分子を } x \text{ で割った}$$

ここで $x > 0$ より相加相乗平均より $x + \frac{1}{x} + 1 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} + 1 = 3$ 等号成立は $x > 0$ かつ

$x = \frac{1}{x}$ つまり $x = 1$ のとき成立するので

$$\frac{2x}{x^2+x+1} = \frac{2}{x+1+\frac{1}{x}} \leq \frac{2}{3} \text{ 等号成立は } x = 1 \text{ のとき}$$

よって、 $\frac{2x}{x^2+x+1}$ の最大値は $\frac{2}{3}$ ($x = 1$) をとる。

今回話した内容は、それほど難しくないと思います。でも、知らなかったら解けないよね？大学受験には頻出なんですけど、本当に知らない人が多いんです。しっかりと理解しておいてください。

河見賢司

目指せ偏差値45から55！高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください(何か言ってもらえると嬉しいです)

magdai@hmg-gen.com