

「ルールが分かれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

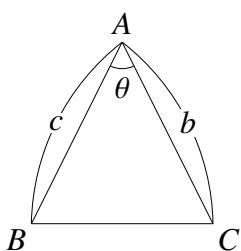
<http://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

質問内容

ベクトルで三角形の面積の公式 $S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$ の公式すぐに忘れてしまうんですけど、どうやって覚えたらいいですか？

そうですね。確かに長い公式で覚えるのは大変ですね。僕も、受験生の頃はうろ覚えでした。実は、この公式って簡単に導けるので、うろ覚えでもいいんです。

それほど出題頻度が高いわけでもないので、出てきたらその場で導くという方法でも OK だと思います。では、この公式を導いていきます。



上記のようになっているとき、三角形の面積が $S = \frac{1}{2} bc \sin \theta$ というのは知っていると思います。ここから、導いていきます。

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \theta$$

*まず、上記の公式をベクトル表記します

$$= \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 \sin^2 \theta}$$

*内積の公式を使うには $\cos \theta$ が必要、 $\sin \theta$ の式から $\cos \theta$ の式を出すには $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$ の公式を使うしかない。この公式を使うにはとりあえず $\cos \theta$ が $\cos^2 \theta$ の形になっていないとダメなのでルートをつけて強引に $\cos^2 \theta$ の形を作りました。

なお、忘れている人も多いと思うけど、 $\sqrt{A^2} = |A|$ ですよ。

ただ、今回の場合 $|\vec{AB}| > 0, |\vec{AC}| > 0$ です。また、 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ より $\sin \theta > 0$ です。

よって、 $|\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \theta > 0$ です。

よって、 $|\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \theta = \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 \sin^2 \theta}$ となります。

$$= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 (1 - \cos^2 \theta)} \quad \leftarrow \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta \text{ より}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - |\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 \cos^2 \theta}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \quad \leftarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos \theta \text{ より。}$$

↑ これで、ベクトルを使った三角形の面積が導けた！

ちなみに成分が与えられているときの三角形の面積の公式もこの公式から導くことができます。まずは、次の公式を覚えてください。

成分が与えられたときの三角形の面積の公式

$\vec{AB} = (a, b), \vec{AC} = (c, d)$ のとき、三角形 ABC の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} |ad - bc| \text{ となる。}$$

では、上記の公式を導いていきます。

$\vec{AB} = (a, b), \vec{AC} = (c, d)$

$|\vec{AB}|^2 = a^2 + b^2, |\vec{AC}|^2 = c^2 + d^2, \vec{AB} \cdot \vec{AC} = ac + bd$ となる。

$$\begin{aligned}
& |\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2 \\
&= (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) - (ac + bd)^2 \\
&= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 - a^2c^2 - 2abcd - b^2d^2 \\
&= a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \\
&= (ad - bc)^2
\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} \\
&= \frac{1}{2} \sqrt{(ad - bc)^2} \\
&= \frac{1}{2} |ad - bc| \quad \leftarrow \text{公式が導けた！}
\end{aligned}$$

↑ $\sqrt{A^2} = A$ ではなく、 $\sqrt{A^2} = |A|$ であることに注意してください

ひとつ目の公式 $S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2}$ は、最初にも話しましたが公式が必要になればその場で導いてもらうという解き方でいいと思います。複雑に見えるかもしれませんが、公式を導くのはごくごく簡単な式変形をしているだけなので慣れてくると、すぐに公式が導けるとおもいます。

ふたつ目の公式の $S = \frac{1}{2} |ad - bc|$ は、これも簡単に導けますが簡単な形なので暗記するようにしてください。別にベクトルの単元でなくても、3点の座標が与えられているときの三角形の面積の公式はこの公式を使って求めていってもらってかまいませんよ。

当たり前だよ、と思う人が多いとは思いますが、意外にもベクトルの問題以外でこの公式を使ってはいけないと思っている人が多いのであえて書かせてもらいました。

今回は、これで終了です。それではがんばってください。

数学って難しいですね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」→「入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格!」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格!」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールが分かれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

河見賢司

高校数学の勉強法
<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com