

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！  
<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

---

質問内容

曲線  $y = \frac{(1 - \log x) \log x}{x}$  と  $x$  軸で囲まれた部分の面積を求めよ

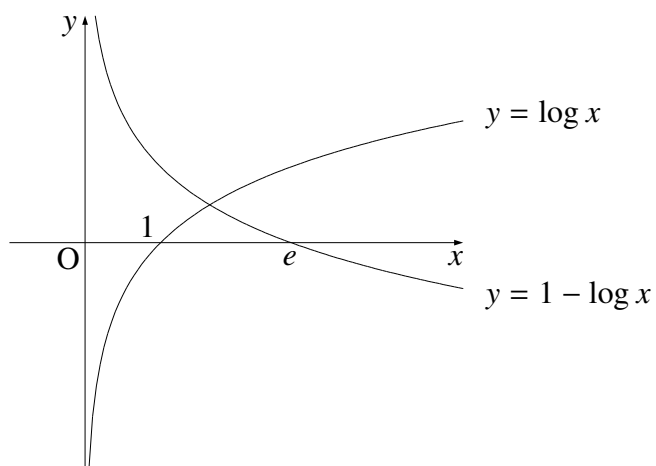
上記のような問題が分かりません。 $y = \frac{(1 - \log x) \log x}{x}$  のグラフがかけません。どうやったらいいですか？

こんにちは、河見賢司です。積分の問題ですね。

たまに勘違いしている人がいるんですけど、面積を求めよとか体積を求めよといった問題では、グラフは微分をして丁寧にかく必要はありません。グラフの上下関係さえわかったら十分です。

で、 $y = \frac{(1 - \log x) \log x}{x}$  のグラフがどうなるか ( $x$  軸との上下関係だけに着目します) ということを話していきます。まず、真数条件より  $x > 0$  という条件がありますので、 $y = \frac{(1 - \log x) \log x}{x}$  の符号は、分母は常に正なので、分子の  $(1 - \log x) \log x$  だけによって決まってきます。

ここで、 $y = \log x$  と  $y = 1 - \log x$  のグラフをかくと



上図から判断すると、

$x < 1$  のとき  $\log x < 0$  で  $1 - \log x > 0$  なので、 $\log x(1 - \log x) < 0$

$1 < x < e$  のとき  $\log x > 0$  で  $1 - \log x > 0$  なので、 $\log x(1 - \log x) > 0$

$e < x$  のとき  $\log x > 0$  で  $1 - \log x < 0$  なので、 $\log x(1 - \log x) < 0$  となります。

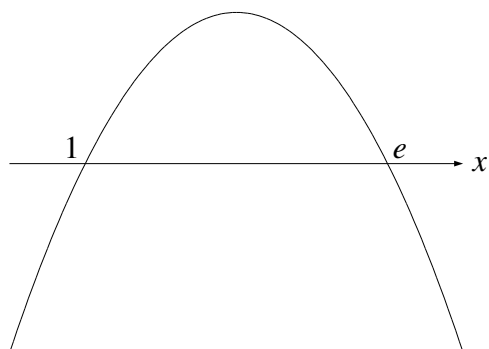
$y = f(x) = \frac{(1 - \log x) \log x}{x}$  の符号は  $(1 - \log x) \log x$  の符号と一致するので、

$x < 1$  のとき、 $f(x) < 0$

$1 < x < e$  のとき、 $f(x) > 0$

$e < x$  のとき、 $f(x) < 0$  となります。

このことから、 $y = f(x)$  のグラフをかくと (← あくまで、 $x$  軸との上下関係のみに着目したグラフです。どんなグラフであれ  $x$  軸より上側にあれば面積を求める計算式は同じになります。)



ここまできたら、 $y = f(x)$  と  $x$  軸とによって囲まれば部分の面積は簡単だよ。

求める部分の面積を  $S$  とすると、 $S = \int_1^e f(x) dx$  となります。

後は、この定積分の計算をするだけなんですけど、この計算が少し難しい(と言っても受験生なら常識としておいて欲しいんですけど...)

この定積分を計算するには以下の公式を覚えてください。

積分の公式

$$\int f'(x) \{f(x)\}^n = \frac{1}{n+1} \{f(x)\}^{n+1} + C \text{ となる。}$$

上記の公式は本当に重要です。また後ほど機会を見つけて解説したいと思いますが、なぜ成り立つかの確認は右側の  $\frac{1}{n+1} \{f(x)\}^{n+1}$  を微分したら、確かに  $f'(x) \{f(x)\}^n$  になっていることから確認できますよ。

学校で、部分積分の勉強をしたと思いますが、実は実際の大学受験で部分積分が出題されることはあまりありません(もちろんあることにはありますが、圧倒的にこの公式を使えるタイプの積分が多いです)

定積分でインテグラルの中身が積の形になっている時、部分積分をするのではなく、必ずこの公式を使える形になっていないか確認をするようにしてください。

### 【解答】

$y = f(x) = \frac{(1 - \log x) \log x}{x}$  は  $f(x) = 0$  となるのは  $x = 1, e$  であり、また  $1 \leq x \leq e$  の範囲でのみ  $y \geq 0$  となる。

曲線  $y = f(x)$  と  $x$  軸とによって囲まれた部分の面積  $S$  は、 $S = \int_1^e \frac{(1 - \log x) \log x}{x} dx$  となる。

$$\begin{aligned}
S &= \int_1^e \frac{(1 - \log x) \log x}{x} dx \\
&= \int_1^e \frac{\log x - (\log x)^2}{x} dx \\
&= \int_1^e \left( \frac{\log x}{x} - \frac{(\log x)^2}{x} \right) dx \\
&= \int_1^e \left( (\log x)' \log x - (\log x)' (\log x)^2 \right) dx
\end{aligned}$$

↑  $\frac{1}{x} = (\log x)'$  より。これで  $\int f'(x) \{f(x)\}^n = \frac{1}{n+1} \{f(x)\}^{n+1} + C$  の公式が使える形になった！

$$\begin{aligned}
&= \left[ \frac{1}{2} (\log x)^2 - \frac{1}{3} (\log x)^3 \right]_1^e \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \\
&= \frac{1}{6} \quad \leftarrow \text{これが答え}
\end{aligned}$$

$\int f'(x) \{f(x)\}^n = \frac{1}{n+1} \{f(x)\}^{n+1} + C$  の公式を知らない人が多いと思います。なぜか知らないけど、高校では解説をしないところが多いんですよ。

積分の中身が積の形になっているとき、教科書などに載っている定積分の計算では部分積分でしか解けないことが多いです。

ですが、実際の大学受験で面積や体積を求めるときの定積分の計算は、この公式を使える形になっていることが圧倒的に多く、また部分積分で解くよりもこの公式で解いて方が、本当に圧倒的に短時間に解くことができます。

今回は、おおざっぱにしか説明していませんが、この  $\int f'(x) \{f(x)\}^n = \frac{1}{n+1} \{f(x)\}^{n+1} + C$  は本当に重要なのでまた別の機会に紹介したいと思います。

今回、理解してほしい内容としては、面積や体積を求めるときグラフの上下関係さえ分かればOKです。

だから、グラフの上下関係がわかるときは、グラフはまじめに微分する必要はないということです。

面積や体積で必要なのは、グラフの正確な形でなく上下関係だけです。そういったことをしっかりと頭にいれながら問題を解くようにしてください。それでは、がんばってください。

---

数学って難しいですね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

メルマガは以下より、登録をしてください。

<https://hmg-gen.com/merutou.html>

ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)

河見賢司