

「ルールが分かれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<http://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

質問内容

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$ の問題ってどうとくのですか？なんとなく分母を有理化するのかな？とは思いますが、うまくいきません。

そうですね、確かに難しい問題ですね。このタイプの問題なんですけどそれほど出題されるって訳じゃないけどたまに見かけるので一応覚えておいた方がいいと思います。

「有理化するのか？」と思ったみたいですが勘がいいですね。確かに有理化して解いていきますよ。

累乗根を含んだ極限で不定形のときは有理化をするといったルールがあります。今回の問題の場合、 $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ と分母も分子も極限值は0です。こういったとき、不定形なので有理化をします。

ルートのときは、たとえば $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ のときは、分母分子に $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ をかけたよね。こうすることによって $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$ ってなるからルートを外せるんだよね。

ルートのときは、2乗になってくれたらルートを外せたけど、3乗根のときは3乗になったら累乗根を外せるよね。 $a - b$ に何かをかけて3乗の形ににしたいんだけど、これは $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ っていう公式を利用したら3乗の形になるから、分母分子に $a^2 + ab + b^2$ をかけます。

慣れてくるとそのまま式変形をやってもらってもいいのですが、最初のうちは見にくいので $\sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} = A$, $\sqrt[3]{1-x} = (1-x)^{\frac{1}{3}} = B$ とでも置き換えてみます。

有理化をするために分母分子に $(1+x)^{\frac{2}{3}} + (1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}} + (1-x)^{\frac{2}{3}} = A^2 + AB + B^2$ をかけるのですが、分子の計算は分かると思いますが、分母の計算が少し分かりにくいと思

うので一応書いておきます。

$$\begin{aligned}(\text{分母}) &= (A - B)(A^2 + AB + B^2) \\ &= A^3 - B^3 \\ &= \left((1+x)^{\frac{1}{3}}\right)^3 - \left((1-x)^{\frac{1}{3}}\right)^3 \\ &= (1+x) - (1-x) \quad \blacktriangleleft \text{指数法則 } (a^m)^n = a^{mn} \text{ より、 } (A^{\frac{1}{3}})^3 = A^{3 \cdot \frac{1}{3}} = A \text{ より} \\ &= 2x\end{aligned}$$

それでは、解答に進みます。ここでは置き換えは利用しません。もし分からなければ、上記のように置き換えて解いていってください。

【解答】

$$\begin{aligned}& \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)^{\frac{1}{3}} - (1-x)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{(1+x)^{\frac{2}{3}} + (1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}} + (1+x)^{\frac{2}{3}}}{(1+x)^{\frac{2}{3}} + (1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}} + (1+x)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \left\{ (1+x)^{\frac{2}{3}} + (1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}} + (1+x)^{\frac{2}{3}} \right\}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{3}} + (1+x)^{\frac{1}{3}}(1-x)^{\frac{1}{3}} + (1+x)^{\frac{2}{3}}}{2} \quad \blacktriangleleft \text{分母分子を } x \text{ で約分した} \\ &= \frac{(1+0)^{\frac{2}{3}} + (1+0)^{\frac{1}{3}}(1-0)^{\frac{1}{3}} + (1+0)^{\frac{2}{3}}}{2} \quad \blacktriangleleft x=0 \text{ を代入した (注) を見よ} \\ &= \frac{1+1+1}{2} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

(注) について

以外に知らない人が多いのですが、 \lim の問題は代入できるときは代入をして解いていきます。代入できるときと言いましたが、ほとんどのときが代入できます。代入できないのは、分母が0になるときと考えてもらってかまいません。

今回の問題では、最初の段階の $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$ に $x=0$ を代入すると分母は $\sqrt[3]{1+0} - \sqrt[3]{1-x} = 1 - 1 = 0$ となるので代入できません。

有理化することで、代入したとき分母の値が0以外になってくれるので、有理化しました。

今回の問題でも解き方を知らなかったら問題は解けないよね？数学って、頭の良し悪しを言う人が多いけど要は知っているかどうかが大きいです。でも、覚える量としては英語なんかと比べると本当に少ないのでそれほど身構える必要はないと思います。ひとつずつがんばって覚えていってください。

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦勞はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」→「入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格!」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格!」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格!」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下の枠をクリックしてください。

ルールが分かれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

ラインでも配信しています。ラインの方は以下よりお願いします。

ラインで登録する！

河見賢司

高校数学の勉強法

<http://www.hmg-gen.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com