

こんにちは、河見賢司です。このプリントでは、数学Ⅲの極限の中で「数列の極限」の問題を解説します。

極限ってこれまでの数学と違って、ある意味テキトウに考えることが多いです。

テキトウってどういうことかというと、 $\infty + \infty$ は ∞ になりそうとか、 $\infty \times \infty$ も ∞ になりそう！ってというのは、なんとなく感覚的に分かりますよね。

これまでの数学では、「厳密に考えていかないとダメだったけど」極限では、厳密に考えずに、「感覚的にだいたいこうなりそう！」って思えた方法で大丈夫です。

なぜ、こういうことを言うかと言えば、「高校数学の範囲では、厳密に極限の定理を証明することはできない！」といったことがあります。

極限って、証明するには高校数学の内容を超えているものが多いんです。だから、だいたい感覚的に「こうなりそう！」と思えるものなら、それを使ってもらって大丈夫ですよ。

最初のうち極限は、難しく感じることも多いかもしれませんが、解いているうちに慣れてくると思えます。

それでは、いきなり問題に進みます。頑張ってくださいね。

問題 1 (A) 教科書

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n)$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n^3)$$

【問題 1 の解説】

まず、(1) から解いていきます。

まず、パッと見た感じで答えが予想できると思うけど、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n)$ の答えは、 ∞ になりそうだね。

n^2 も n も両方とも無限大になるけど、 n^2 と n を比べたら n^2 の方が大きくなるスピードが

速い！

n	1	2	3	4	5	...
n^2	1	4	9	16	25	...

◀ n よりも n^2 の方が大きくなるスピードが速い！

$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \infty$ と答えをいきなり書きたいんだけど、実際の答案でいきなり ∞ と答えを書くのはちょっとまずいです。

そこで、次のことを覚えておいてください。

極限の性質 その1

$$\frac{(\text{定数})}{\pm\infty} = 0$$

上記のことは、感覚的に分かるよね。分母の値が限りなく大きくなった（正の無限大に発散した）とき、または限りなく小さくなった（負の無限大に発散）したとき、その値は限りなく0に近づいてくれます。

$\frac{1}{10} = 0.1$, $\frac{1}{100} = 0.01$, $\frac{1}{1000} = 0.001 \dots$ と分母の値をどんどん大きくすると、分数全体の値としてはどんどん0に近づきます。分母の値がマイナスだったとしても、 -0.1 , -0.01 , -0.001 とどんどん0に近づくよね。

だから、 $\frac{(\text{定数})}{\pm\infty} = 0$ となります。

PS

(定数)
 $\pm\infty$ っって書いたけど、数式の中に ∞ の記号を書き入れるのはやめてくださいね。

正式な答案で、こんな分母に ∞ を入れる式を書いてはダメですよ。今回は、分かりやすいように書いてだけです。

それでは、もう一つ覚えておかないといけない性質を書いておきます。

— 極限の性質 その2 —

数列 $\{a_n\}$ が収束して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ とする。数列 $\{b_n\}$ が正の無限大に発散する。

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ 。このとき、以下のことがいえる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -\infty$$

$$A > 0 \text{ のとき、} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty, \quad A < 0 \text{ のとき、} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty$$

上記の性質が成立します。これは、あっていることは感覚的に分かると思います。教科書には、載っていたり、載っていなかったりするみたいですが、証明なしで使ってもらって構いません。それでは、問題1の解答に進みます。

【問題1の解答】

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$= \infty \leftarrow A > 0 \text{ のとき、} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty \text{ の性質を使った！}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n^3) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\frac{1}{n} - 1\right) \leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} - 1\right) = -1$$

$$= -\infty \leftarrow A < 0 \text{ のとき、} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = -\infty \text{ の性質を使った！}$$

問題 2 (A) 教科書

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3n+1}{3n^2+4n+5}$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2+n+1}$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+2n}{2n+1}$$

【問題 2 の解説】

問題に進む前に、まずは以下のことを覚えておいてください。

極限の性質 その 3

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ とする。このとき、

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = kA$ ただし k は定数

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = A + B, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = A - B$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (la_n + mb_n) = lA + mB$ ただし、 l, m は定数

(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = AB$

(v) $B \neq 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$

これは以下のようにした方が分かりやすいかもしれません。まったく同じことを言っているだけです。

極限の性質 その 3

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ がともに収束するとき

(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} ka_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ただし k は定数

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n, \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (la_n + mb_n) = l \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + m \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ただし、 l, m は定数

(iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(v) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$

少しでもだけ日本語で言うと、「数列がすべて収束するとき、数列の計算はこれまでの普通の数字と同じように計算してもらって大丈夫ですよ」ということです。

すべてのものが収束してくれたら、普通の数字と同じように計算できます。数列の極限を解くときのポイントは、すべてのものが収束するように変形することです。

それでは、これを踏まえた上で問題の解説に進みます。

【問題 2 (1) の解説】

まず、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2}$ は、どういうふうに解いていこうかな？と考えるんだけど、結論から言えば分母、分子を n で割って解いていきます。「なぜ、 n で割るの？」と思った人もいると思いますが、とりあえず n で分母、分子を割ってみますね。理由は、後で話します。

【問題 2 (1) の解答】

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n+1}{n}}{\frac{n+2}{n}} \quad \leftarrow \text{分母分子を } n \text{ で割った！} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \\ &= \frac{3+0}{1+0} \quad \leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0 \text{ より} \\ &= 3 \end{aligned}$$

問題を解くときに、「分母分子を n で割りました」。こういった問題は、分母分子を分母の最高次数の文字で割ることがポイントです。このことは、重要なので、まとめておきますね。

極限の問題の解法

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ のときは、分母の最高次数の文字で分母分子を割る！

この話をすると、「分母の最高次数の文字でなくて分子の最高次数の文字で割ったらダメなんですか？」と質問を受けることがあります。

回答としては「分子の最高次数の文字で割ってはいけません」です。なぜかと言うと、分子の最高次数の文字で割ってしまうと、分母の極限値が0になります。極限の問題は、すべてのものが収束するように変形させるということがポイントでした。ですが、分母が0になってしまうと、うまくいきません。

「極限の性質その3」で書きました。 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$ とできるのは、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ のときという条件があります。分母が0になったらまずいので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ のときは、分母の最高次数の文字で分母分子を割ります。理屈としては、こうなのですがいちいち考えるのも面倒なので、「 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ のときは、分母の最高次数の文字で分母分子を割る！」を解法として丸暗記してください。

【注意】

今から、少し細かい話をします。先ほどの問題で、以下のように解きました。

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n+2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n+1}{n}}{\frac{n+2}{n}} \quad \leftarrow \text{分母分子を } n \text{ で割った！} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} \\ &= \frac{3+0}{1+0} \quad \leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0 \text{ より} \\ &= 3 \end{aligned}$$

上の答えは少し無理があります。なぜかと言うと、数学は証明された事柄しか使えない。上のようになることは、感覚的に分かると思うけど、少し適当すぎます。

今、僕たちが使えるものはこれまで覚えてきた性質のみです。今回は、今まで勉強してきた「極限の性質 その1」と「極限の性質 その3」を使います。

それでは、この性質を使ってまじめな？答案を書いています。

【厳密な答案】

$n \neq 0$ のとき、

↑今回は $\lim_{n \rightarrow \infty}$ で考えます。 n が正の無限大になるとき、当然ですが $n \neq 0$ です。

$$\begin{aligned} & \frac{3n+1}{n+2} \\ & \frac{3n+1}{n} \\ & = \frac{\frac{3n+1}{n}}{\frac{n+2}{n}} \end{aligned}$$

↑分母分子を n で割った！0で割ることはできません。でも $n \neq 0$ だから、 n で割ることができました。

$$= \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}}$$

ここで、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 3 + 0 = 3$$

$$\text{また、} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 1 + 0 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{2}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n} \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)} = \frac{3}{1} = 3$$

本当に厳密に解けば上記のようになります。ただ、実際の試験でも最初の答案でも大丈夫です。

「今まで示した定理しか使えない」といった、厳密な数学の考え方を知って欲しいから

あえて書いてみました。ただ、ここまで丁寧にしなくても、ほとんどの大学では大丈夫ですよ。

それでは、(2) 以降の答案に進みます。

【問題2の(2)(3)(4)の解答】

$$\begin{aligned} (2) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 3n + 1}{3n^2 + 4n + 5} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{4}{n} + \frac{5}{n^2}} \quad \leftarrow \text{分母の最高次数の文字の } n^2 \text{ で分母分子を割った!} \\ &= \frac{2 + 0 + 0}{3 + 0 + 0} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{n^2 + n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \quad \leftarrow \text{分母の最高次数の文字の } n^2 \text{ で分母分子を割った!} \\ &= \frac{0 + 0}{1 + 0 + 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{2n + 1} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 2}{2 + \frac{1}{n}} \quad \leftarrow \text{分母の最高次数の文字の } n \text{ で分母分子を割った!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{1 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{2n + 1} = \infty$

↑ 極限の性質その1を使った $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A (A > 0)$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ が言えます。

(4) の問題で、分母分子を n で割るところまでは思いついたけど、 $\frac{n+2}{2+\frac{1}{n}} = n \cdot \frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}$

の変形が思いつかなかったよ。という人がいると思います。

その気持ちよく分かります。でも、正式な答案を書くにはこれしか方法はないんです。

(2) や (3) なんかも、問題を見た瞬間に答えのみだったら浮かびますよね。分母分子ともに無限大といっても、2乗と3乗では大きくなるスピードがまったく違いますから（もちろん3乗の方が圧倒的に大きくなるスピードが速い！）

でも、正式な答案としては上記のように書かないとダメなんです。「あたりまえのことを示すのは面倒だな」と思うかもしれませんが、数学ってそういうものだ、と割り切って、答え方を覚えてください。

それでは、次の問題に進みます。

問題3 (A) 教科書

次の数列の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n} \quad (\text{京都産業大学}) \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}) \quad (\text{明治大学})$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2 \right) \quad (\text{名古屋市大})$$

【問題3の解説】

問題に進む前に、まずは不定形の話をしてします。

例えば $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty$ になることや $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ になることは感覚的にすぐに分かると思います（感覚的って言ったけど、これは答案で使ってもらって大丈夫ですよ。例えば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n^3)$ を計算するとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 = \infty$ だから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + n^3) = \infty$ としてもらって大丈夫です）。

でも、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ はどうなるか分かりません。たまに、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \infty - \infty = 0$ なんてする人もいるけど、これは絶対にやったらダメだからね。 ∞ を文字と同じように計算することなんてできないです。

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ のとき、同じ $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ でも

$$a_n = n^2, b_n = n \text{ のとき、} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \infty$$

$$a_n = n + 1, b_n = n \text{ のとき、} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 1$$

$$a_n = n^2, b_n = n^3 \text{ のとき、} \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = -\infty$$

上記のように、 $\infty - \infty$ となる場合でも、収束することもあるし、正の無限大に発散することもあるし、負の無限大に発散することもあります。だから、 ∞ を文字のように扱ってはダメ。

極限で計算ができるのは、すべての数列が収束するときだけです。

ちなみに、 $\infty - \infty$ の形になっているものを不定形といいます。

不定形の中には、 $\infty - \infty$ の他に、 $\frac{\infty}{0}, 0 \times \infty, \dots$ などがあります。

それでは、問題に進みます。

【問題3 (1) の解説】

それでは、(1) から解説をしていきます。

まず、(1) なんだけど $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ だから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n} = \frac{1}{\infty - \infty}$ の形をしています。こんなの、よく分からないよね ($\infty - \infty$ は不定形です)。で、こういうとき、どうするかと言えば決まりきった解法があります。まずは、次のことを覚えてください。

—— ルートを含んだ極限の考え方 ——

ルートを含んだ極限で不定形のときは有理化をする！

では、(1) に戻ります。ルートを含んだ極限で不定形のときは有理化をします。だから、とりあえず有理化を試みるね。

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \quad \leftarrow \text{分母の有理化をした！} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{n^2 + n - n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{n} \end{aligned}$$

とりあえず、有理化をするだけでここまできました。で、ここからどうするか？なんだ

けど、これは $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ のときは、分母の最高次数の文字で分母分子を割るんだよね。

今回も、この考えに従って分母分子を n で割ります。

【問題 3 (1) の解答】

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n} - n} \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{\sqrt{n^2 + n} + n} \quad \leftarrow \text{分母の有理化をした！} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{n^2 + n - n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} + n}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}{1} \quad \leftarrow \text{分母分子を } n \text{ で割った！} \\ &= \frac{\sqrt{1 + 0} + 1}{1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

【問題 3 (2) の解説】

この問題も同じく、ルートを含んだ極限で不定形なので有理化をします。数学 3 を勉強したての人は、「有理化って言っても、分母にルートがある訳じゃないし、どうするの？」なんて思う人もいると思います。

中学生の頃から勉強をしてきた有理化は分母の有理化だったと思うけど、極限のときは分子の有理化をすることもあります（今回は、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}}{1}$ とみなせば、分子がルートを含んでいます）。

ちょっと、見慣れない式変形だなと感じるかもしれませんが、やっていることは分母の有理化と同じです。それでは、問題の解答に進みます。

【問題3 (2) の解答】

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n})$$
$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}} \quad \leftarrow \text{分子の有理化をした！}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n - (n^2 - n)}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}}$$

↑ ルートの中身が2乗は、スピードで考えれば1次式と同じこと。分母の最高次数は1次と考えます

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \quad \leftarrow \text{分母の最高次数の } n \text{ で分母分子を割った！}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}}$$

$$= 1$$

【問題3 (3) の解説】

$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2 \right)$ 。この問題なんだけど、いきなり有理化をしてもらってもいいかもしれないけど（実はいきなり有理化をした方が計算がラクです。でも、そんなことはやってみないとわかりません。だから、どっちでやってもいいですよ）、まずカッコの外にある n を中にかけてから計算していくことにします。

後の流れは (1) と (2) とまったく同じです。

【問題3 (3) の解答】

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2 \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + n} - 2n)$$

↑ $n \rightarrow \infty$ で n が正だからできました。 $n > 0$ のとき、 $n = \sqrt{n^2}$ です。気を付けてね。

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{4n^2 + n} - 2n) \cdot \frac{\sqrt{4n^2 + n} + 2n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} \quad \leftarrow \text{分子の有理化をした！}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n} + 2n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + \frac{1}{n}} + 2} \quad \leftarrow \text{分母の最高次数の } n \text{ で分母分子を割った！} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4 + 0} + 2} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

【注】 上記の $n \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2 \right) = \sqrt{4n^2 + n} - 2n$ について

例えば、 $2\sqrt{2}$ は $2 = \sqrt{2^2}$ より、 $2\sqrt{2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8}$ として OK です。

でも、 $a\sqrt{2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2a^2}$ としてはいけませんよ。といいますか、 $a \geq 0$ のときこの変形は OK ですが、 $a < 0$ のときは、この変形は成立しません。

どこが違うのかと言うと、 $a = \sqrt{a^2}$ とした部分です。ルートの外し方は以下の通りです。

ルートの外し方

$$\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A & (A \geq 0) \\ -A & (A < 0) \end{cases}$$

上記のことを踏まえれば、 $a < 0$ のとき、 $\sqrt{a^2} = -a$ なんだから、 $a = -\sqrt{a^2}$ です。だから、 $a\sqrt{2} = -\sqrt{a^2} \cdot \sqrt{2} = -\sqrt{2a^2}$ ですよ。

今回の場合 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ と n は正の無限大で考えています。だから、当然 $n > 0$ です。 n は自然数なので正と考える方法もありますよ。

だから、 $n \left(\sqrt{4 + \frac{1}{n}} - 2 \right) = \sqrt{4n^2 + n} - 2n$ として OK です。これって、けっこうよく間違えます。気をつけてくださいね。

【数学嫌いの人のためのコラム】

「なんでルートがきたら有理化をするの？これに従えば解けてしまうんですけど、どうも納得できません」なんて言う人がいます。

もちろん、もっともな意見なんですけど、僕の意見としては「覚えてくださいね」なんです。

僕も、高校生の頃は「なんでそう考えるんだろう？」なんてついつい深く考えるクセがありました。ですが、考えて解いていたものの、いっこうにできるようになりませんでした。

そんなとき、「とりあえず解き方を覚えよう！」といったやり方に変更したところ急にできるようになりました。

今なら、分かります。考えようにも数学の力のない当時の僕が考えるなんて無理なんですよね。ですが、解法を覚えていき、ある程度数学の力がついてきたら、難しい参考書も理解しながら読み進めることができました。

今のあなたの学力が、どういったものかは分かりません。ですが、今やってもらっているこのテキストにひっかかるものがあるとしたら、あなたの学力はたかが知れています。

たかが知れているという表現を使いましたが、あなたの能力を否定している訳ではないですよ。今から、このテキストを使ってどんどんと解法を覚えていけば、次第に数学の力が上がってきます。そうなってから、「なぜ、この問題はこのように解くんだろう？」なんて考えてやってもらえばいいと思いますよ。

まずは、「答えを見ちゃっていいんだよね」なんて気持ちで気楽に進めていってください。

問題 4 (C)

数列の極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2} - 2n \sqrt[3]{n^3 - n^2} + n^2 \right\}$ の値は である。

(産業医科大学)

【問題 4 の解説】

問題に進む前に 3 乗根の有理化の話をしてします。 $\frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}}$ の分母を有理化を例にとって話していきます。3 乗根の有理化ってどうするんだっけ? と思った人もいると思います。たまに出てくるの、しっかりと覚えておいてください。

3 乗根の有理化は $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ の展開・因数分解の公式を使います。

$$(\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}) = (\sqrt[3]{3})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = 3 - 2 = 1 \text{ となってくれます。}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} &= \frac{1}{\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2}} \cdot \frac{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}} \quad \leftarrow \text{分母分子に } \sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2} \text{ をかけた} \\ &= \frac{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2}}{3 - 2} \\ &= \sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{2^2} \quad \leftarrow \text{分母の有理化完了!} \end{aligned}$$

これを踏まえた上で今回の問題に進みます。

今回の問題は、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2} - 2n \sqrt[3]{n^3 - n^2} + n^2 \right\}$ です。なんだか本当にややこしい問題だね。でも、やり方としてはこれまでとほとんどいっしょ。まず、ルート（今回の場合は 3 乗根）が含まれているから有理化したいけど …

ちょっと複雑すぎて有理化できそうにない。そこで、どうしようかな? と考えます。

$\{\sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2} - 2n\sqrt[3]{n^3 - n^2} + n^2\}$ はよく見ると、 $(\sqrt[3]{n^3 - n^2} - n)^2$ という形に因数分解できます。

「こんな因数分解なんて気づけないよ！」なんて思いますよね。僕も受験生の頃はそう思っていたと思います。でも、でもね当たり前なんですけど、大学受験に出題される数学の問題は解ける問題が出題されています。

当たり前ですよ。解けない問題は出題されません。で、この問題の場合「有理化するはず！」ということは分かります。なぜかと言うと、累乗根を含んだ極限の問題はほとんどすべての問題で有理化をしてから解いていきます（もちろん、例外もあるけどね）。

でも、元の式のままでは有理化できない。ということは、有理化できる形にうまく具合に式変形できるはずなんです。

そういうことを念頭に置いて考えれば、因数分解するということが気づけるようになってきます。

よく生徒さんに問題を解説していて、「なんで思いついたのですか？」と聞かれることがあります。今回の問題もそうだったけど、数学の問題ってある程度解法のパターンがあるんです。「このときは、こうする」といった形です。

「この問題だったら、こういうふうにするしか問題の解きようがないな」ということは「こういうふうに変形したら、解ける形になってくれるな」と考えます。

今の話、数学のできる人にとってはとんでもない考え方かもしれません。

「数学は、そういったものではない！イチから自分で考えるんだ！」なんて怒られるかもしれません。

でも、少なくとも大学受験の数学の問題を解くうえにおいては、とても役に立つ考え方ですよ。

高尚な数学なんてどうでもいい、とにかく合格したい！という人は割り切って勉強して

ください。(僕もそのたちでした…でも、今ならなんとなく数学ができる人の言い分も分かるような…でも、最初のうちはいいと思いますよ。とにかく、ちゃっちゃと進んでください)

$$\sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2} - 2n\sqrt[3]{n^3 - n^2} + n^2$$

$$= (\sqrt[3]{n^3 - n^2} - n)^2 \quad \leftarrow \text{因数分解をした}$$

*ここからは有理化をするぐらいしかない! だから有理化をしていきます。

$$= \left\{ (\sqrt[3]{n^3 - n^2} - n) \cdot \frac{(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot n + n^2}{(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot n + n^2} \right\}^2 \quad \leftarrow \text{有理化をした!}$$

$$= \left\{ \frac{(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^3 - n^3}{(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot n + n^2} \right\}^2$$

↑分子の $\{\sqrt[3]{(n^3 - n^2)} - n\} \cdot \{(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot n + n^2\} = (\sqrt[3]{n^3 - n^2})^3 - n^3$ となることがわかりにくいかもしれません。

ただ、展開・因数分解の公式 $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ で $a = \sqrt[3]{n^3 - n^2}$, $b = n$ と置き換えれば、上記のようになるということが分かります

$$= \left\{ \frac{n^3 - n^2 - n^3}{(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot n + n^2} \right\}^2$$

$$= \left\{ \frac{-n^2}{(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot n + n^2} \right\}^2$$

で、ここから何をするかちゃんとわかるよね。こんな複雑な式でもやることは同じです。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ のときは、分母の最高次数の文字で分母分子を割ります ← やっていることは、これまでと同じ! 迷子にならないようにね。でも、ホント疲れる…(若干、疲れてテンション下がってます(笑))。

ここから、分母の次数を考えていきます。

分母は、 $(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot n + n^2$ です。

一番左側の項 $(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2$ の3乗根の中身は3次式。3乗根なので1次式と同じみたいなもの。そして、それを2乗しているなので2次式。

次に真ん中の項 $\sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot n$ は $\sqrt[3]{n^3 - n^2}$ は、さっきと同じく1次式。さらに n をかけるので2次式。一番右側の項の n^2 は当然2次式。分母は2次式。だから、今回は分母分子を n^2 で割ります。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{-n^2}{(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot n + n^2} \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{-n^2}{(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot n + n^2} \times \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \right\}^2 \quad \leftarrow \text{分母分子を } n^2 \text{ で割った!} \\ &= \left\{ \frac{-1}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} + 1} \right\}^2 \quad \leftarrow \text{下記の【注】を見てください} \end{aligned}$$

【注】 について

$$(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 \times \frac{1}{n^2} = \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2}$$

について話しておきます。

これが分かれば、 $(\sqrt[3]{n^3 - n^2}) \cdot n \times \frac{1}{n^2} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}}$ であることも、容易に理解できると思います。

$$\begin{aligned}
& (\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 \times \frac{1}{n^2} \\
&= \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot \frac{1}{n} \times \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot \frac{1}{n} \\
& \quad \uparrow (\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 = \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot \sqrt[3]{n^3 - n^2} \text{ より。また、かける順番を入れ替えた} \\
&= \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{n^3}} \times \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{n^3}} \\
&= \sqrt[3]{(n^3 - n^2) \cdot \frac{1}{n^3}} \cdot \sqrt[3]{(n^3 - n^2) \cdot \frac{1}{n^3}} \\
&= \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} \times \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} \\
&= \sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} \quad \blacktriangleleft \text{これで確認できた!}
\end{aligned}$$

ホントに長かったけど、これで終わりです。では、解答に進みます。

【問題4の解答】

$$\begin{aligned}
& \sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2} - 2n\sqrt[3]{n^3 - n^2} + n^2 \\
&= (\sqrt[3]{n^3 - n^2} - n)^2 \quad \blacktriangleleft \text{因数分解をした} \\
&= \left\{ (\sqrt[3]{n^3 - n^2} - n) \cdot \frac{(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot n + n^2}{(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot n + n^2} \right\}^2 \quad \blacktriangleleft \text{有理化をした!} \\
&= \left\{ \frac{(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^3 - n^3}{(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot n + n^2} \right\}^2 \\
&= \left\{ \frac{n^3 - n^2 - n^3}{(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot n + n^2} \right\}^2 \\
&= \left\{ \frac{-n^2}{(\sqrt[3]{n^3 - n^2})^2 + \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot n + n^2} \right\}^2
\end{aligned}$$

$$= \left\{ \frac{-n^2}{\left(\sqrt[3]{n^3 - n^2}\right)^2 + \sqrt[3]{n^3 - n^2} \cdot n + n^2} \times \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}} \right\}^2 \quad \leftarrow \text{分母分子を } n^2 \text{ で割った!}$$

$$= \left\{ \frac{-1}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} + 1} \right\}^2$$

よって、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt[3]{(n^3 - n^2)^2} - 2n\sqrt[3]{n^3 - n^2} + n^2\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{-1}{\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{n}} + 1} \right\}^2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$$

ホントに長くて大変な問題だったよね。

でも、順番に適切に考えていけば、「むちゃくちゃな発想」というものも必要なく、自然な流れで思いつける発想でした。

大学受験で、難しい問題といってもこういったものが多いですよ。とにかく、「このときはこうする（こうすることが多い）」というものを頭の中に叩き込んでいってください。

そうすると、難しい問題でも自然と解けるようになりますよ。頑張ってください。

問題5 (B) 教科書

第 n 項が $\sqrt{(n-1)(2n-1)} + kn$ である数列 $\{a_n\}$ が収束するように定数 k の値を定めよ。また、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

【問題5の解説】

問題を見た瞬間に、「ルートが含まれているから有理化ね!」と考えた人は、ちょっとまってください。

ルートを含んだ極限で有理化をするときは、不定形の時だけだったよね。

$k > 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(n-1)(2n-1)} = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} kn = \infty$ より、

$\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{(n-1)(2n-1)} + kn\} = \infty$ になってしまうよね。

また、 $k = 0$ のときは、 $kn = 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \{\sqrt{(n-1)(2n-1)} + kn\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{(n-1)(2n-1)}$ より、これも正の無限大に発散してしまいます。

この問題は、収束するには $k < 0$ である必要があります。($k < 0$ だからといって、必ずしも収束するかどうかはわかりませんよ。ただ、 $k \geq 0$ のときは、絶対に発散します。だから、この数列が収束するには $k < 0$ である必要があります。 $k < 0$ は、あくまで必要条件です)

これまでで、 $k < 0$ ということが分かりました。このとき、ルートを含んだ極限で不定形の時だから、有理化をしていきます。

$$\begin{aligned} & \sqrt{(n-1)(2n-1)} + kn \\ = & \left\{ \sqrt{(n-1)(2n-1)} + kn \right\} \cdot \frac{\sqrt{(n-1)(2n-1)} - kn}{\sqrt{(n-1)(2n-1)} - kn} \quad \leftarrow \text{有理化をした!} \\ = & \frac{(n-1)(2n-1) - k^2 n^2}{\sqrt{(n-1)(2n-1)} - kn} \\ = & \frac{(2-k^2)n^2 - 3n + 1}{\sqrt{(n-1)(2n-1)} - kn} \end{aligned}$$

とりあえず、有理化でここまできたけど、ここからは次のことを覚えておいてください。

分数の極限の収束と発散

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{a_n}$ で、

- (i) $(b_n \text{の次数}) > (a_n \text{の次数})$ のとき、 ∞ または $-\infty$ に発散する
- (ii) $(b_n \text{の次数}) = (a_n \text{の次数})$ のとき、 $\frac{(b_n \text{の最高次数の文字の係数})}{(a_n \text{の最高次数の文字の係数})}$ に収束する
- (iii) $(b_n \text{の次数}) < (a_n \text{の次数})$ のとき、 0 に収束する

このことは、少し考えたら分かるよね。まず、(i) のときだけど、分母よりも分子の方が次数が高ければ、分子の方が大きくなるスピードが速いよね（係数がマイナスのときは、小さくなるスピードが速い）。だから、 $\pm\infty$ に発散します。

次に (ii) のときです。例えば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 5n^2 + 3n + 1}{2n^3 + 3n^2 + 6n + 9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{n} + \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{2 + \frac{3}{n} + \frac{9}{n^2} + \frac{9}{n^3}} = \frac{3}{2}$ です。

これを見てもらっても分かると思うけど、極限值は、最高次数の文字の係数のみによってきまります。分母と分子の最高次数だけが極限值に影響して、それ以外のもの（今回は分子の $5n^2 + 3n + 1$ や分母の $3n^2 + 6n + 9$ ）は極限值には影響せず、この部分が変わっても極限值は変わりません。

最後に、(iii) の場合だけど、分子よりも分母の次数が高いということは分母の方が分子よりもはるかに大きくなります（係数がマイナスのときは、はるかに小さくなります）。そんなときは、 0 に収束してくれるよね。

これらのことは、よく出てくるので覚えておいてください。それでは、問題に戻ります。

$\frac{(2-k^2)n^2-3n+1}{\sqrt{(n-1)(2n-1)}-kn}$ は、分母はたかだか1次式（ルートなので1次式とは言いませんが、ルートの中身の2乗は、スピードで考えれば1次式と同じです。この考えは、何度も出てきているのでもう大丈夫だよ）です。ということは、収束してくれるためには、分子が1次式（あるいは定数）でないといけません。

今回の場合、分子は $(2-k^2)n^2-3n+1$ です。これが1次式となるためには $2-k^2=0$ が言えます。ここで、これより、 $k=\pm\sqrt{2}$ となりますが、 $k<0$ より、 $k=-\sqrt{2}$ となります。

ここからは、これまで解いてきたルートを含んだ極限と同じ問題なので、解けると思います。それでは、解答に進みます。

【問題5の解答】

数列 $\{a_n\}$ が収束するには $k<0$ が必要。

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{(n-1)(2n-1)} + kn \} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt{(n-1)(2n-1)} + kn \} \cdot \frac{\sqrt{(n-1)(2n-1)} - kn}{\sqrt{(n-1)(2n-1)} - kn} \quad \leftarrow \text{有理化をした！} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2n-1) - k^2n^2}{\sqrt{(n-1)(2n-1)} - kn} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2-k^2)n^2 - 3n + 1}{\sqrt{(n-1)(2n-1)} - kn} \end{aligned}$$

収束するので、 $2-k^2=0$ がいえる。また、 $k<0$ であるので $k=-\sqrt{2}$

以下 $k=-\sqrt{2}$ のときを考える。

$$\begin{aligned}
& \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n + 1}{\sqrt{(n-1)(2n-1)} + \sqrt{2}n} \quad \leftarrow \frac{(2-k^2)n^2 - 3n + 1}{\sqrt{(n-1)(2n-1)} - kn} \text{ に } k = -\sqrt{2} \text{ を代入した} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{1}{n}}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)} + \sqrt{2}} \quad \leftarrow \text{分母分子を、分母の最高次数の } n \text{ で割った。} \\
&= \frac{-3 + 0}{\sqrt{(1-0)(2-0)} + \sqrt{2}} \\
&= \frac{-3}{2\sqrt{2}} \\
&= -\frac{3}{4}\sqrt{2}
\end{aligned}$$

以上より、 $k = -\sqrt{2}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\frac{3}{4}\sqrt{2}$

少し、テクニク的な話をします。これって、あまり話している人はいないんですけど、パワフルな考えです。それは…

*数学の答えは多くの場合ひとつです。答えが複数個出てきたときは、より丁寧に条件を見返すこと！

数学の答えって多くの場合、1個になります。2個答えが出てきたとき、もちろん2個とも答えになることもなくはないんですけど、2個とも答えになることは圧倒的に少ないんです。

まあ、ドヤ顔で『これってパワフルだぜ！』なんて言うと、数学のできる人からは「こんな考え、まったく論理的でないよ」なんて言われそうですけど、結構役に立つことは事実ですよ。

この問題も、最初の $k < 0$ を忘れていたとしても、「2個とも答えになることは少ない」ということを知っていれば、 $k = \sqrt{2}$ という間違えた答えを削除することができます。

数学の問題を解くときに、必要条件で解いたときは必ず十分性を確認しないといけません。分かってはいるんですけど、そうは言っても必要条件だけで解いたかどうか分からなくなることありますよね（ホントはダメなんですけどね・・・）。そんなとき、この「答えは1個になることが多い」ということを知っていれば、間違いに気づくことができます。

【例えば、こんな例があります】

問題：方程式 $\sqrt{x+1} = x-1$ を解け。

ルートが入っているから、考えにくい。とりあえず2乗しようか。ということで2乗します。

$$\sqrt{x+1} = x-1$$

$$\Leftrightarrow x+1 = (x-1)^2 \quad \leftarrow \text{両辺を2乗した}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ または } 3$$

これって典型的な誤答例なんだ。どこが間違っているか分かる？実は1行目から2行目の $\sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow x+1 = (x-1)^2$ が間違っています。

$\sqrt{x+1} = x-1 \Rightarrow x+1 = (x-1)^2$ は真だけど、 $x+1 = (x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x+1} = x-1$ は真ではありません。ここで、同値性が崩れています。だって、 $x+1 = (x-1)^2$ のとき、 $x-1 = -\sqrt{x+1}$ のときも考えられるもんね。

数学IIIをやっている人にとっては簡単すぎる例えだったかもしれませんが、ですが、もし仮に同値変形を間違えて、「 $x = 0, 3$ 」と答えが2つ出てきたとします。

そんな、場合でも「2個とも答えとなることは少ない」ということを知っていればもう

一度確認することができます。で元の $\sqrt{x+1} = x-1$ に代入してもらえば、 $x=0$ は不適で $x=3$ が適するということが分かると思います。

PS

今回は、強調のためにあえて同値変形の記号 (\Leftrightarrow) を書きました。ですが、通常的答案には、証明など強調したいときを除いて (\Rightarrow) なんかも含めて書かない方がいいですよ。

もちろん書いてもらってもいいのですが、当たり前ですけど同値でないときに、同値 (\Leftrightarrow) を書いていれば減点されます。同値っていうことは常に意識しておかないといけないんですけど、どうしても間違えちゃうことがあります。

そんなとき、矢印の記号を何も書いていなければ減点されませんが、矢印の記号を書いていれば減点されてしまいます。繰り返しになりますが、必要条件や同値の記号は証明などで、強調したいときにのみ使うようにしたらいいですよ。

問題6 (B)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{an + b - \sqrt{3n^2 + 2n}} = 5 \text{ のとき、 } a = \square, b = \square \text{ である。} \quad (\text{名城大学})$$

【問題6の解説】

この問題も、問題5とほとんど同じです。まずは、有理化するのかな？と思うんだけど、その前に考えないとだめなことがあったよね。

$a \leq 0$ のとき、分母の $an + b - \sqrt{3n^2 + 2n}$ は負の無限大に発散します。ということは、このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{an + b - \sqrt{3n^2 + 2n}}$ は0に収束します。(極限の性質その2 $\frac{(\text{定数})}{\pm\infty} = 0$ より)。だから、この問題は $a > 0$ が必要です。

【問題6の解答】

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{an + b - \sqrt{3n^2 + 2n}} = 5 \text{ となるとき、 } a > 0 \text{ が必要。}$$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{an + b - \sqrt{3n^2 + 2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{an + b - \sqrt{3n^2 + 2n}} \cdot \frac{an + b + \sqrt{3n^2 + 2n}}{an + b + \sqrt{3n^2 + 2n}} \quad \leftarrow \text{有理化をした} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b + \sqrt{3n^2 + 2n}}{(an + b)^2 - (3n^2 + 2n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b + \sqrt{3n^2 + 2n}}{(a^2 - 3)n^2 + (2ab - 2)n + b^2} \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{an + b + \sqrt{3n^2 + 2n}}{(a^2 - 3)n^2 + (2ab - 2)n + b^2} = 5 \text{ となるとき、 } a^2 - 3 = 0 \text{ となる必要がある。}$$

↑問題5で話した $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$ で0以外に収束するときは、(分母の次数) = (分子の次数) より

$$a = \pm\sqrt{3} \text{ となる。また、 } a > 0 \text{ より、 } a = \sqrt{3}$$

① に $a = \sqrt{3}$ を代入

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}n + b + \sqrt{3n^2 + 2n}}{(2\sqrt{3}b - 2)n + b^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3} + \frac{b}{n} + \sqrt{3 + \frac{2}{n}}}{(2\sqrt{3}b - 2) \cdot 1 + \frac{b^2}{n}} \quad \leftarrow \text{分母の次数は1。分母分子を } n \text{ で割った！} \\ &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}b - 2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}b - 1} \end{aligned}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}b - 1} = 5$$

$$\sqrt{3} = 5(\sqrt{3}b - 1) \quad \leftarrow \text{両辺に } \sqrt{3} - 1 \text{ をかけて、分数をなくした}$$

$$5\sqrt{3}b = \sqrt{3} + 5$$

$$b = \frac{1}{5} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{3}}{3}$$

以上より、 $a = \sqrt{3}$, $b = \frac{1}{5} + \frac{\sqrt{3}}{3}$

問題7 (A) 教科書

次の極限值を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)}{n^3} \quad (\text{東京電機大学})$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4}$$

【問題7の解説】

数学Bで勉強をした数列のシグマさえ知っていれば、簡単な問題です。もし、分からなかった人は数列のシグマをしっかりと勉強し直してから、解いてください。

一応、数列のシグマの公式をまとめておきます。

数列のシグマの公式

$$\sum_{k=1}^n c = cn \quad (c \text{ は } n \text{ に関係のない定数})$$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^n k^3 = \left\{ \frac{1}{2}n(n+1) \right\}^2 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

それでは、解答に進みます。

【問題7の解答】

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1)}{n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k(k+1)}{n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (k^2 + k)}{n^3}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)}{n^3}$$

↑ 極限の場合、わざわざ展開して整理する必要はないよ。展開しなくても計算できます。

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}(n+1)}{n^2} \quad \leftarrow \text{分母分子を } n \text{ で約分をした}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{6}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(2 + \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{1} \quad \leftarrow \text{分母分子を分母の最高次数の } n^2 \text{ で割った！}$$

$$= \frac{\frac{1}{6}(1+0)(2+0) + 0 \cdot \frac{1}{2}(1+0)}{1} \quad \leftarrow \text{すべての収束するとき、普通に計算できる！}$$

$$= \frac{1}{3}$$

(2)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \cdots + n^3}{n^4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^3}{n^4}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2}{n^4} \quad \leftarrow \text{シグマの公式 } \sum_{k=1}^n k^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2 \text{ より}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}(n+1)^2}{n^2} \quad \leftarrow \text{分母分子を } n^2 \text{ で約分をした}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2}{1} \quad \leftarrow \text{分母の最高次数の } n^2 \text{ で分母分子を割った！}$$

$$= \frac{1}{4}(1+0)^2$$

$$= \frac{1}{4}$$

問題 8 (A) 教科書

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n = 2n^3 + 9n^2 + 7n$ で表されるとする。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。
- (2) $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくと、数列 $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和 T_n を求めよ。
- (3) (2) で求めた T_n を一般項とする数列 $\{T_n\}$ について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ を求めよ。

(室蘭工業大学)

【問題 8 の解説】

この問題も、問題 7 に引き続いて数学 B の数列の知識があれば簡単に解ける問題です。

数列を理解している人にとってはなんてことない問題かもしれませんが、復習もかねて数学 B の数列の公式から解説していきます。

まず、今回の問題なんだけど初項から第 n 項までの和 S_n が与えられているよね。 S_n がらみの漸化式が出てきているときは、以下の事柄を使います。

S_n について (数学 B)

S_n がきたら次の事柄を使う。

- ① $S_1 = a_1$
- ② $n \geq 2$ のとき、 $a_n = S_n - S_{n-1}$

まず、① の $S_1 = a_1$ なんだけど、これは簡単です。 S_n っていうのは、初項から第 n 項までの和です。だから、 S_1 は初項から初項までの和、つまり $S_1 = a_1$ です。

S_n が与えられていて、 a_1 が与えられていないという問題がよくあります。そんなとき、この $S_1 = a_1$ より、 a_1 を求めます。

つぎに、② の、 $n \geq 2$ のときの $a_n = S_n - S_{n-1}$ です。

S_n ってというのは、日本語で言うと「初項から第 n 項までの和」です。 S_n を実際に書き出してみると $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ となります。

次に S_{n-1} というのは、初項から第 $n - 1$ 項までの和です。これも、書き出してみると $S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$ となります。

S_n から S_{n-1} をひくと、以下のようになります。

$$\begin{array}{r} S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ -) S_{n-1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ \hline S_n - S_{n-1} = a_n \end{array}$$

上記のようになるので、 S_n から S_{n-1} をひくことによって、 $S_n - S_{n-1} = a_n$ が成立するということを確認できると思います。

ただ、ここで注意しないといけないことがあります。 S_0 の 0 の部分は自然数じゃないといけません。 $n = 1$ のとき、 S_{n-1} に $n = 1$ を代入すると $S_{1-1} = S_0$ となるので、 S_0 の 0 の部分が 0 になってしまいます。

0 は自然数でないので、このときは成立しません。ですから、 $S_n - S_{n-1} = a_n$ の公式が成立するには $n \geq 2$ という条件が必要になります。

この S_n の公式の最後に覚えておかないといけないことは、②で求めた $n \geq 2$ のときの a_n は $n = 1$ のとき、成立することも成立しないこともあります。

一方で、階差数列も $n \geq 2$ のとき、 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ で a_n が求まりますが、この求めた a_n は $n = 1$ のときでも必ず成立してくれます（厳密に言えば、成立しない数列もあることはあるのですが、高校数学の範囲でそういった問題はほぼ出てこないと思います）。

前置きが長くなりました。このことを踏まえて、問題に進みます。

【問題 8 (1) の解答】

*これは、①の $S_1 = a_1$ と ②の $n \geq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$ を使うだけです。

$S_n = 2n^3 + 9n^2 + 7n$ で $n = 1$ のとき、

$$S_1 = 2 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 = 18, \quad a_1 = S_1 \text{ より } a_1 = 18$$

$n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (2n^3 + 9n^2 + 7n) - \{2(n-1)^3 + 9(n-1)^2 + 7(n-1)\} \\ &= 2n^3 + 9n^2 + 7n - 2n^3 + 6n^2 - 6n + 2 - 9n^2 + 18n - 9 - 7n + 7 \\ &= 6n^2 + 12n \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

①は $n = 1$ のときも成立する。

↑実際に $a_n = 6n^2 + 12n$ に $n = 1$ を代入すると、 $a_1 = 6 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 = 18$ となり、 $n = 1$ のときに別枠で求めた $a_1 = 18$ となってくれます。こういうふうには $a_n = S_n - S_{n-1}$ は $n = 1$ のとき成立することがありますし、成立しないこともあります。階差数列（階差数列も $n = 1$ と $n \geq 2$ で場合分けが必要だが、 $n \geq 2$ で求めた式は $n = 1$ のときも必ず成立する！）との違いを認識しておいてください。

以上より、 $a_n = 6n^2 + 12n (n = 1, 2, 3, \dots)$

【問題 8 (2) の解説】

シグマの分数型の問題です。シグマの問題で公式が使えないもの（シグマの中身が分数、ルート、対数など・・・）は必ず互いに打ち消し合う形になってくれます。

その中でも、シグマの分数型はよく出てきて、部分分数分解をすることにより互いに打ち消しあう形になってくれます。

部分分数分解について（数学B）

$$\frac{1}{(n+a)(n+b)} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{n+a} - \frac{1}{n+b} \right) \text{と変形できます。}$$

上記の部分分数分解ですが、「暗記」している人も多いですが、わざわざ暗記するほどのものでもないですよ。ただ単に右辺を通分して式変形をすると左辺になってくれています。確認は各自でしておいてくださいね。それでは、解答に進みます。

【問題8（2）の解答】

$$b_n = \frac{1}{a_n} = \frac{1}{6n^2 + 12n} = \frac{1}{6n(n+2)} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=1}^n b_k \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{12} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+2} \right) \\ &= \frac{1}{12} \left\{ \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{12} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{2(n+1)(n+2) + (n+1)(n+2) - 2(n+2) - 2(n+1)}{2(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{3n^2 + 5n}{2(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(3n+5)}{24(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

【注】

上記ですが、分数の和・差のときはメンドウではありますが、通分したものを答えにしておいた方がいいです。

しておいた方がいいという曖昧な表現を使いました。一応、高校数学では上記のような答えにしておくことが多いです。でも、僕が大学生のとき、数学の教授から「わざわざ、

そんなメンドウなことしないでいいよ。だって、通分なんて誰でも計算できるからいいよ」なんてことを言われたことを覚えています。

ほとんどの大学では採点基準は公表されていません。だから、どこまで書くか「よくわからない」のが現状です。ただ、ひょっとしたら減点されるかもしれないので、教科書のように通分した答えを書いておくのが無難だと思います。

【問題 8 (3) の解答】

* (2) の最終的な答えである $T_n = \frac{n(3n+5)}{24n(n+1)(n+2)}$ を使うよりも、少し前の $T_n = \frac{1}{12} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right)$ を使う方がラクです。

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} T_n &= \frac{1}{12} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \\ &= \frac{1}{12} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0 \right) \\ &= \frac{1}{12} \cdot \frac{3}{2} \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

問題9 (B)

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ の極限值を求めよ。

【問題9の解説】

「えーと、 b_n が B に収束して、 $a_n - b_n$ が 0 に収束するから、なんとなく a_n も B に収束しそうだな」なんて考える人が多いです。答えとしてはあっているのですが、この答案では 0 点です。問題2で話した極限の性質をもう一度書いておきます。

極限の性質 その3

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ がともに収束するとき

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ただし k は定数
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (l a_n + m b_n) = l \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + m \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ ただし、 l, m は定数
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$
- (v) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$

で、これで重要なことは、「極限はすべてが収束するとき、普通に計算することができる」だったんだよね。

今回は a_n の極限を求めよという問題です。こういうときは、 a_n をすべて収束するものだけであらわすということがポイントです。

a_n をすべて収束するものだけで表すって言っても、最初のうちはわかりにくいかもしれませんが。ですが、 $a_n = (a_n - b_n) + b_n$ ですよ。 $a_n - b_n$ と b_n はともに収束するので、これだと計算することができます。

【問題9の解答】

$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ より、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \{(a_n - b_n) + b_n\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \blacktriangleleft a_n - b_n, b_n \text{ がともに収束するからこういった操作ができる！} \\ &= 0 + B \\ &= B\end{aligned}$$

問題 10 (B)

数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+3)a_n = 2$ をみたすとき、次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n$

【問題 10 の解説】

これも、問題 9 とまったく同じ。(1) なら a_n を、(2) なら na_n をとにかく収束するものどうしの和、差、積、商（商の場合は、分母が 0 に収束するものだけはダメ）を使って表します。

まず、(1) の a_n からです。これは、 $a_n = \frac{1}{2n+3} \cdot (2n+3)a_n$ と変形すれば OK です。なぜ、これで大丈夫かという $\frac{1}{2n+3}$ は当然 0 に収束するよね。また $(2n+3)a_n$ は問題で 2 に収束すると与えられています。

a_n を収束するものどうしの積で表すことができました。これで、解くことができます。

次に (2) の na_n です。これはちょっと難しい。でも、当たり前だけど与えられているものを使うしかないよね。当然 $(2n+3)a_n$ は使います。どうしようかな？といろいろ考えるんだけど、以下のようにしたら大丈夫です。

最初のうちは、少し難しいかもしれませんが、自分で実際に手を動かしていれば気づけるようになってくると思いますよ。

「ああ、難しい…」なんて落ち込まないで、「やっていたら、できるようになるんだから別にいいかあ」なんて軽い気持ちでやってもらっていたらいいですよ。

PS

今回、なぜそこまで強調したかという、これ「受験生のときの僕が苦労したからです(苦笑)」当時、「こんな絶対、思いつけへんで。むちゃ言うなや」(関係ないですけど、僕兵庫県出身なので関西弁でした。今は、いろいろな地域の生徒さんと話しているので、

ぐちゃぐちゃです（笑）どーでもいい話、スンマセン）なんて思っていました。

当たり前なんですけど、今は「余裕で解けます！」別に自慢じゃないですよ。言いたかったこととしては、最初は分からなくても、繰り返しやっていたら、自然とできるようになるということです。

それほど、気合いを入れず脱力感満載でやってもらった方がいいと思いますよ。気合いを入れすぎると、疲れちゃいますから。話がそれでごめんなさいね。それでは、本題に戻ります。

$na_n = (2n+3)a_n \times \frac{n}{2n+3}$ 。これなら、 $(2n+3)a_n$ は収束してくれるし、 $\frac{n}{2n+3}$ は分母と分子の次数が同じなので収束するよね。これでOKです。

「えっ！これを書いている河見ってこんなことも気づけないの？」なんてバカにする人もいるかもしれません（悲しい…）ですが、僕ってこの程度なんですよね。

数学って、難しく感じている人がいますけど、経験値を増やしていけばある程度でしたら誰でもできるようになります。で、その経験値の増やし方なんですけど、最初のうちは「うんうん唸りながら考える必要はない」。

分からなければすぐに答えを見る、そんな感じでOKですよ。一問の問題を60分間自分で「あーでもない、こーでもない」と考えるのなら、解答を見ながらでいいのでその問題を5分で10回以上解く。その方が経験値がたまっていきますよ。

もちろん、ある程度のレベルまで到達したら、自分で考えるということも必要になってきますが、このテキストなら少なくともA問題やB問題で引っかかる人は、まだまだといったレベルです。その段階では、考えるということ自体が無理なので、まずは覚えていってもらえばいいと思いますよ。

異論は、多々あると思います。ですが、数学の能力がない人ができるようになるには、それしかないですよ。ある程度、覚えてしまったら考えて解くことができ、それで数学が楽しくなってきます。

【問題10の解答】

(1)

$$a_n = (2n + 3)a_n \cdot \frac{1}{2n + 3}$$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 3)a_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n + 3} = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (2n + 3)a_n \cdot \frac{1}{2n + 3} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 3)a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n + 3} \\ &\uparrow (2n + 3)a_n, \frac{1}{2n + 3} \text{ ともに収束するので、この変形ができる!} \\ &= 2 \cdot 0 \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

(2)

$$na_n = (2n + 3)a_n \cdot \frac{n}{2n + 3}$$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 3)a_n = 2$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n + 3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ (2n + 3)a_n \cdot \frac{n}{2n + 3} \right\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (2n + 3)a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n + 3} \\ &\uparrow (2n + 3)a_n, \frac{n}{2n + 3} \text{ ともに収束するので、この変形ができる!} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

問題 1 1 (B)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2a_n}{a_n + 3} = 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

【問題 1 1 の解説】

問題 1 1 も、問題 9 や問題 1 0 と同じようにして解いていきます。

a_n を収束するものだけで表したいんだけど、問題 1 0 のように考えて思いつくことはちょっと難しい。そこで、今回の問題はとりあえず $b_n = \frac{2a_n}{a_n + 3}$ とおいて、 a_n を b_n で表すことにします。 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ は問題に 1 に収束すると書かれています。

じゃあ、 a_n を b_n を使って表すことができたなら、もうこの問題は解けたことになるよね。では、解答に進みます。

【問題 1 1 の解答】

$b_n = \frac{2a_n}{a_n + 3}$ とする。

$$b_n = \frac{2a_n}{a_n + 3}$$

$$b_n(a_n + 3) = 2a_n$$

$$a_n b_n + 3b_n = 2a_n$$

$$(2 - b_n)a_n = 3b_n$$

ここで $b_n = 2$ のとき、(左辺) = 0, (右辺) = 6 より不適、よって $b_n \neq 2$ より、両辺を $2 - b_n (\neq 0)$ で割る。

$$a_n = \frac{3b_n}{2 - b_n}$$

↑両辺を 0 で割ることはできないので気をつけてください。文字式で割るときは、0 になるかどうかを必ず確認するクセをつけておいてください。

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3b_n}{2 - b_n} \\ &= \frac{3 \cdot 1}{2 - 1} \quad (\because \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1) \\ &= 3 \end{aligned}$$

問題 1 2 (A) 教科書

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^n + 5^n}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (4^n - 3^n)$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + (-3)^{n+2}}{(-3)^n + 2^n}$$

【問題 1 2 の解説】

問題に進む前に、まずは簡単に言葉の確認からしていきます。

*収束・発散について

収束・発散についてまとめておきます。

極限には収束するものと、発散するものがあります。

収束しないことを発散するといいます。発散には3種類あります。

① 正の無限大に発散する。② 負の無限大に発散する。③ 発散するものの中で正の無限大でも負の無限大でもないものを、振動するといいます。

また、問題で「極限值を求めよ」なら収束するときの値です。通常、発散するときに「極限值を求めよ」と問われることはないと思います。もし、発散するときに問われた場合「極限值はない」と答えたら大丈夫です。

「極限を求めよ」なら、収束するときには収束する値、また発散するときには正の無限大、負の無限大などを書いておかないといけません。振動するときの極限は、「極限はない」と答えます。少し細かい話ですが、疑問に思う人が多いので書いておきました。それでは、今回の問題に戻ります。

まずは以下のことを覚えるようにしてください。

r^n の極限について

$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ について

(i) $r > 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$

(ii) $r = 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1$

(iii) $-1 < r < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$

(iv) $r = -1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ は $-1, 1, -1, 1, \dots$ より、振動する。

(v) $r < -1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ は $\pm\infty$ より、振動する。

このことより、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ の収束条件は $-1 < r \leq 1$ である。

今後、数列の極限 (\lim の形をしている) の問題で n 乗が出てきたときは、上記の5つの場合分けを思い出せるようにしておいてください。

なお、分かっている人も多いと思いますが、なぜ上記が言えるのか簡単に説明しておきます。ここでは正確な証明は省きます。ただ、「証明せよ」という問題も大学受験で出てくることがあります。これについては、後ほど(問題21)で話します。今回は、感覚的に理解しておいてもらえば十分です。

まずは、(i) の場合です。 $r > 1$ のときは、1 よりも大きいものを掛け合わせていったらどんどん大きくなっていくよね。だから、 $r > 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ です。

よく分からない人は、 $r = 2$ とでもしてください。 $r = 2$ のとき、 $r^2 = 4, r^3 = 8, r^4 = 16, \dots, r^n$ の n の部分を大きくすると、 r^n はどんどん大きくなります。だから、 $r > 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ です。

次に、(ii) ですが、これは分かると思います。1は何乗しても1なので、 $r = 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ です。

次に (iii) の $-1 < r < 1$ のときです。 $-1 < r < 1$ は具体例として $r = \frac{1}{2}$ と $r = -\frac{1}{2}$ をやってみようと思います。

まずは $r = \frac{1}{2}$ のとき、 $r^2 = \frac{1}{4}, r^3 = \frac{1}{8}, r^4 = \frac{1}{16}, \dots$ というふうに分母の値がどんどん大きくなっていくよね。だから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ になります。

次に $r = -\frac{1}{2}$ のときです。 $r^2 = \frac{1}{4}, r^3 = -\frac{1}{8}, r^4 = \frac{1}{16}$ と符号はプラスマイナスは変わるけど、この場合も全体としては0に近づいていくよね。

これらのことより、 $-1 < r < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ です。

次に $r = -1$ のとき、 $r = -1, r^2 = 1, r^3 = -1, r^4 = 1, \dots$ と ± 1 を繰り返していきます。 $r < -1$ のとき、具体例として $r = -2$ とでもすると、 $r^2 = 4, r^3 = -8, r^4 = 16, r^5 = -32, \dots$ とプラスマイナス変わるけど絶対値としてはどんどん大きくなっていくよね。だから、 $r < -1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ は $\pm\infty$ 。よって、振動します。

少し間があいたので、もう一度問題を書いておきます。

問題 1 2 (A)

次の極限を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^n + 5^n}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (4^n - 3^n)$

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + (-3)^{n+2}}{(-3)^n + 2^n}$

【問題 1 2 (1) の解説】

これは感覚的に言えば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^n + 5^n} = 0$ になるっていうのは、すぐに分かるよね。分母も分子も ∞ なので、 $\frac{\infty}{\infty}$ の不定形です。でも、分子の 3^n と分母の $2^n + 5^n$ なら分子よりも分母よりも圧倒的に大きくなるスピードが速い！だから、答えは0になります。

ただ、これを答えにする訳にはいかないなので、答案の書き方を話していくことにします。

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^n + 5^n}$ は分母分子を 5^n で割ります。 5^n で割る理由は、後で話します。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^n + 5^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} \quad \leftarrow \text{分母分子を } 5^n \text{ で割った!}$$

なぜ、 5^n で分母分子を割ったかもう分かるよね。

こうすることで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ です。 $-1 < r < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ です。

【 5^n で割る理由について】

今回 n 乗を含んでいるものは分子の 3^n と分母の $2^n, 5^n$ の3つです。この中から一番絶対値の大きい 5^n で割りました。こうすることで、 n 乗の中身の r は $-1 < r < 1$ となってくるので、すべて収束してくれます。

以前にも話したけど、極限の問題はすべてのものが収束するときは、普通に計算することができます（厳密に言えば、もっと丁寧に考えないとダメなんだけど、今の段階ではとりあえず大丈夫です）。

こういった問題では n 乗の中身の絶対値の一番大きいもので割る と考えていきます。

【問題 1 2 (1) の解答】

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{2^n + 5^n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{3}{5}\right)^n}{\left(\frac{2}{5}\right)^n + 1} \quad \leftarrow \text{分母分子を } 5^n \text{ で割った!}$$

$$= \frac{0}{0+1} \quad \leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0 \text{ より}$$

$$= 0$$

【問題 1 2 (2) の解説】

この $\lim_{n \rightarrow \infty} (4^n - 3^n)$ も、見た瞬間に答えは ∞ って分かるよね ($4^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty, 3^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ だけど、 4^n の方が 3^n よりも大きくなるスピードが速い!)。でも、答案にいきなり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (4^n - 3^n) = \infty$ と書いてはいけません。

今回の問題は、問題 1 で勉強をした $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A (A > 0)$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ を使っていきます。

この問題は $4^n - 3^n = 4^n \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right\}$ とすることによって、解いていきます。

【問題 1 2 (2) の解答】

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (4^n - 3^n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right\} = 1$ なので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \cdot \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right\} = \infty$$

【問題 1 2 (3) の解説】

この問題は、(1) とまったく同じようにすれば解くことができます。 n 乗を含んでいるものの中身は、 $-1, -3, 2$ です。この中で絶対値が一番大きいものは -3 なので、分母分子を $(-3)^n$ で割ります。こうすることによって、すべてのものが 0 に収束するものになってくれます。

【問題 1 2 (3) の解答】

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + (-3)^{n+2}}{(-3)^n + 2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n + 9(-3)^n}{(-3)^n + 2^n} \quad \leftarrow \text{すべての指数を } n \text{ にした。} (-3)^{n+2} = (-3)^2(-3)^n = 9(-3)^n \text{ より} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 9}{1 + \left(-\frac{2}{3}\right)^n} \quad \leftarrow \text{分母分子を } (-3)^n \text{ で割った！} \\ &= \frac{0 + 9}{1 + 0} \\ &= \mathbf{9} \end{aligned}$$

問題 1 3 (A) 教科書

次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{r^n + 1} \quad (\text{ただし } r \neq -1) \quad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{r^{2n} + 1}$$

【問題 1 3 (1) の解説】

問題 1 2 で $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ の極限で 5 つに場合分けをするものを話しました。これを使って解いていくだけです。

まず、 $r > 1$ のときです。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ になります。

$\frac{\text{定数}}{\infty} = 0$ を利用するために、このとき分母分子を r^n で割って解いていきます。

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1 + r^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{r^n} + 1} \quad \leftarrow \text{分母分子を } r^n \text{ で割った!} \\ &= \frac{1}{0 + 1} \quad \leftarrow r > 1 \text{ のとき、} \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty \text{ より、} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0 \text{ より} \\ &= 1 \end{aligned}$$

次に $r = 1$ のときですが、これは単純に $r = 1$ を代入するだけで終わりです。

次に $-1 < r < 1$ のときです。このときは、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ なので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1 + r^n}$ は何も変形せずに、このまま解くことができます。収束するときは、普通に計算ができるんだよね。

次に $r = -1$ か? と思うけど、問題文に $r \neq -1$ と書かれているので、今回は $r = -1$ は考えなくていいです。そして、最後の $r < -1$ のときは、 $r > 1$ のときとまったく同じように計算できます。 $r < -1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \pm\infty$ です。 $r > 1$ または $r < -1$ としてもいいで

すが、まとめて $|r| > 1$ のときと書くことが多いです。 $\frac{\text{定数}}{\pm\infty} = 0$ です。

以上のことを踏まえて、解答に移ります。

【問題13 (1) の解答】

(i) $|r| > 1$ つまり $r < -1$ または $1 < r$ のとき

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+r^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{r^n} + 1} \quad \leftarrow \text{分母分子を } r^n \text{ で割った!} \\ &= \frac{1}{0+1} \quad \leftarrow r > 1 \text{ のとき、} \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty \text{ or } -\infty \text{ より、} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{r^n} = 0 \text{ となる} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(ii) $r = 1$ のとき

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+r^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n}{1+1^n} \\ &= \frac{1}{1+1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(iii) $-1 < r < 1$ のとき

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1+r^n} \\ &= \frac{0}{1+0} \quad \leftarrow -1 < r < 1 \text{ のとき、} \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \text{ より} \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上より、

$r < -1$ または $1 < r$ のとき、**1**

$r = 1$ のとき、 $\frac{1}{2}$

$-1 < r < 1$ のとき、**0**

【問題 13 (2) の解説】

(2) も解き方としては (1) と同じです。(1) の場合 n 乗は r^n の 1 通りでしたが、今回の場合 r^n と r^{2n} の 2 通りあるので考えないといけません。

ただ、 $|r| > 1$ を解くと $r < -1, 1 < r$ で、また $|r^2| > 1$ を解くと $r < -1, 1 < r$ とたまたま同じになってくれるので、今回も (1) と同じような場合分けで解いていくことができます。(たまたまと書きましたが、こういった問題多いです。2 個まったく違う場合分けになったら、ちょっとしんどすぎる … よね)

【問題 13 (2) の解答】

(i) $r < -1$ または $1 < r$ のとき ◀ このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \pm\infty, \lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = \infty$ となる

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1 + r^{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{r^n}}{\frac{1}{r^{2n}} + 1} \quad \leftarrow \text{分母分子を } r^{2n} \text{ で割った} \\ &= \frac{0}{0 + 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(ii) $r = 1$ のとき ◀ このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 1$ となる

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1 + r^{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^n}{1 + 1^{2n}} \\ &= \frac{1}{1 + 1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(iii) $r = -1$ のとき ◀ このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \pm 1$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 1$ となる

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1 + r^{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{1 + (-1)^{2n}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{2} \quad \leftarrow (-1)^{2n} = \{(-1)^2\}^n = 1^n = 1 \text{ より} \end{aligned}$$

ここで、 n が偶数のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = 1$ 、 n が奇数のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n = -1$ より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1 + r^{2n}} = \begin{cases} \frac{1}{2} & (n \text{ が偶数}) \\ -\frac{1}{2} & (n \text{ が奇数}) \end{cases} \quad \text{よって、振動する。}$$

(iv) $-1 < r < 1$ のとき ◀ このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} r^{2n} = 0$ となる

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1 + r^{2n}} \\ &= \frac{0}{1 + 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上より、

$r < -1$ または $1 < r$ のとき、**0**

$r = 1$ のとき、 $\frac{1}{2}$

$r = -1$ のとき、極限はない

$-1 < r < 1$ のとき、**0**

【ちょっと、どーでもいい話】

このタイプの問題ですが、個人的に少し思い入れがあります。というのも、僕が高校生のときに、間違えまくったから …

$-1 < r < 1$ のとき、単純に $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ を代入したらいいだけなんですけど、こんなときも分母分子を r^n で割って、「 $\frac{1}{0}$ になるぞ。訳分からんわ！」なんて何度も困った記憶があります（笑）

でも、当たり前ですけど、今ならさらさら解けます（ちょっと自慢）。

僕が言いたかったこととしては、「勘のいい人もいるかもしれないけど、普通の人は1回で解けるようになることは少ないですよ。何度も解き直していたら、自然と頭の中に入ってきます。それまで、頑張っってね」ということです。

このプリントさえ、解けるようになったら大丈夫です。自信をもってやってくださいね。

問題 1 4 (B)

a, b を正の実数とするとき、極限 $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}$ を考える。このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) $a = 2, b = 2$ のとき、 c の値を求めなさい。
- (2) $a > 2, b = 2$ のとき、 c の値を求めなさい。
- (3) $b = 3$ のとき、 $c = \frac{1}{3}$ となる a の範囲を求めなさい。

(福島大学)

【問題 1 4 の解説】

国立大学の福島大学の過去問です。国立大学の過去問と聞くと難しく感じるかもしれませんが、これまでの知識さえあれば比較的簡単に解けるとおもいます。

【問題 1 4 (1) の解答】

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^n}{2^{n+1} + 2^{n+1}} \leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}} \text{ に } a = 2, b = 2 \text{ を代入した} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n} + 1}{2 + 2} \leftarrow \frac{\text{定数}}{\infty} \text{ の形を作るために分母分子を } 2^n \text{ で割った！} \\ &= \frac{0 + 1}{2 + 2} \leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0 \text{ より} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

【問題 1 4 (2) の解説】

問題 1 2 を思い出して欲しいんだけど、こういうふうに n 乗を含んでいる問題は、分母分子を絶対値の一番大きいもので割るんだよね。そうすることで $-1 < r < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ を利用できる形になります。

で、このことを頭に入れて解いていくと今回の問題は $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}}$ で $a > 2, b = 2$ です。ということは a の絶対値の方が b の絶対値より大きいので、分母分子を a^n で割って考えていきます。

【問題 1 4 (2) の解答】

$$\begin{aligned}c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^n}{a^{n+1} + 2^{n+1}} \leftarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + b^n}{a^{n+1} + b^{n+1}} \text{ に } b = 2 \text{ を代入した} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a^n} + \left(\frac{2}{a}\right)^n}{a + 2 \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^n} \leftarrow \text{分母分子を } a^n \text{ で割った!}\end{aligned}$$

ここで、 $a > 2$ より $0 < \frac{2}{a} < 1$ がいえるので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{a}\right)^n = 0$ がいえる。

$$\begin{aligned}&\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{a^n} + \left(\frac{2}{a}\right)^n}{a + 2 \cdot \left(\frac{2}{a}\right)^n} \\ &= \frac{0 + 0}{a + 2 \cdot 0} \left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{a}\right)^n = 0 \right) \\ &= 0\end{aligned}$$

【問題 1 4 (3) の解説】

さっきも話したけど、こういった問題は絶対値の大きい方で割っていくんだよね。今回の場合 $b = 3$ と与えられています。 a は正の数ということを考えて、 $0 < a < 3$ のときと、 $a = 3$ のときと、 $a > 3$ のときとで場合分けをして解いていきます。

【問題 1 4 (3) の解答】

(i) $0 < a < 3$ のとき、 $0 < \frac{a}{3} < 1$ となる。

$$\begin{aligned}c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3^n}{a^{n+1} + 3^{n+1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{a \left(\frac{a}{3}\right)^n + 3} \leftarrow \text{分母分子を } 3^n \text{ で割った!} \\ &= \frac{0 + 1}{a \cdot 0 + 3} \left(\because 0 < \frac{a}{3} < 1 \text{ より } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{3}\right)^n = 0, \text{ また } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0 \right) \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

このとき、 $c = \frac{1}{3}$ となるので、適する。

(ii) $a = 3$ のとき、

$$\begin{aligned}c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3^n}{3^{n+1} + 3^{n+1}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1}{3 + 3} \quad \leftarrow \text{分母分子を } 3^n \text{ で割った!} \\&= \frac{1}{3 + 3} \\&= \frac{1}{6} \neq \frac{1}{3} \quad \text{より不適}\end{aligned}$$

(iii) $a > 3$ のとき、 $0 < \frac{3}{a} < 1$ となる。

$$\begin{aligned}c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 3^n}{a^{n+1} + 3^{n+1}} \\&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{3}{a}\right)^n}{a + 3\left(\frac{3}{a}\right)^n} \quad \leftarrow \text{分母分子を } a^n \text{ で割った!} \\&= \frac{0 + 0}{a + 0} \quad \left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{a}\right)^n = 0\right) \\&= 0 \neq \frac{1}{3} \quad \text{より不適}\end{aligned}$$

以上より、求める a の範囲は $0 < a < 3$ である。

問題 15 (B) 教科書

数列 $\left\{\left(\frac{x}{2x-1}\right)^n\right\}$ が収束するような、実数 x の値の範囲を求めよ。ただし、 $x \neq \frac{1}{2}$

【問題 15 の解説】

これは、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n$ の収束条件が $-1 < r \leq 1$ ということを使うだけです。

今回の場合、 $r = \frac{x}{2x-1}$ なので、 $-1 < \frac{x}{2x-1} \leq 1$ の不等式を解けば OK です。この不等式には、何通りかの解き方があるけど、今回は3通りの方法で解いてみます。いずれの解き方も重要なので、しっかりと理解しておいてくださいね。

【不等式の解法 1 の説明】

まず、ひとつめの解法。それは両辺に $(2x-1)^2$ をかける解法です。

左側の不等式 $-1 < \frac{x}{2x-1}$ を解くとき、両辺に $2x-1$ をかけて分数をなくしたいんだけど、いきなりかけたらダメです。

不等式の両辺にプラスのものをかけると不等号の向きはそのまま、マイナスのものをかけると不等号の向きは逆になるんだよね。だから、不等式の両辺に文字式をかけるときは、文字式の符号を考えないといけません。

$2x-1$ が正のときと、負のときとで場合分けをしないとダメなんですよ。もちろん、場合分けをしたらいいんだけど、ちょっと面倒くさい。そこで、両辺に $(2x-1)^2$ をかけます。 $(2x-1)^2$ は正（何もない場合の2乗は0以上。でも、今回は $2x-1$ が分母にきている時点で、 $2x-1 \neq 0$ という隠れた条件があります）。

両辺に $(2x-1)^2$ をかけたら、分数が外れてくれるし、しかも $(2x-1)^2$ は正なので場合分けをしなくて済みます。だから、この解き方は非常にパワフルな解き方です。

ただ、今回の場合、 $-1 < \frac{x}{2x-1}$ と $\frac{x}{2x-1} \leq 1$ の2個の不等式を解かないといけなくて、少し面倒です。

【不等式の解法1】

$$-1 < \frac{x}{2x-1} \leq 1 \Leftrightarrow -1 < \frac{x}{2x-1} \text{ かつ } \frac{x}{2x-1} \leq 1$$

$$-1 < \frac{x}{2x-1}$$

$$-(2x-1)^2 < \frac{x}{2x-1} \cdot (2x-1)^2 \quad \blacktriangleleft \text{両辺に } (2x-1)^2 \text{ をかけた}$$

$$(2x-1)^2 + x(2x-1) > 0$$

↑ここから展開しない。この2乗をかける解法では共通因数ができる

$$(2x-1)\{(2x-1)+x\} > 0 \quad \blacktriangleleft \text{共通因数 } (2x-1) \text{ でくくった!}$$

$$(2x-1)(3x-1) > 0$$

$$x < \frac{1}{3}, \frac{1}{2} < x$$

これは、 $x \neq \frac{1}{2}$ をみたら。よって、 $x < \frac{1}{3}, \frac{1}{2} < x \dots \textcircled{1}$ とする。

*今回は、 $-1 < \frac{x}{2x-1}$ と分母が0になることはないので（今回の場合、問題文でも与えられていますが）、 $2x-1 \neq 0$ が隠れた条件です。

ですが、不等式の両辺に $(2x-1)^2$ をかけた式は、 $2x-1=0$ つまり $x = \frac{1}{2}$ のときでも OK になってしまいます。OK というか両辺に $(2x-1)^2$ をかけてできた不等式の $(2x-1)^2 + x(2x-1) > 0$ は分数でないので、すべての実数の範囲で考えないといけない、ということは $x = \frac{1}{2}$ のときも考えないといけない。

だから、求まった不等式の解から $x \neq \frac{1}{2}$ という解を除外することを忘れないようにしてください。今回の場合、たまたま求まった答えが $x < \frac{1}{3}, \frac{1}{2} < x$ で $x = \frac{1}{2}$ を含まないものだったので、この $x < \frac{1}{3}, \frac{1}{2} < x$ すべてが OK です。

$$\frac{x}{2x-1} \leq 1$$

$$\frac{x}{2x-1} \cdot (2x-1)^2 \leq (2x-1)^2 \quad \leftarrow \text{両辺に } (2x-1)^2 \text{ をかけた}$$

$$x(2x-1) \leq (2x-1)^2$$

$$(2x-1)^2 - x(2x-1) \geq 0$$

$$(2x-1)\{(2x-1) - x\} \quad \leftarrow \text{共通因数 } (2x-1) \text{ でくくった！}$$

$$(2x-1)(x-1) \geq 0$$

$$x \leq \frac{1}{2}, 1 \leq x$$

$$x \neq \frac{1}{2} \text{ より、 } x < \frac{1}{2}, 1 \leq x \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ かつ } \textcircled{2} \text{ より、 } x < \frac{1}{3}, 1 \leq x$$

【不等式の解法2の説明】

次の解法ですが、グラフをかいて解く方法です。

$-1 < \frac{x}{2x-1} \leq 1$ を解くときに、 $y = -1, y = \frac{x}{2x-1}, y = 1$ の3つのグラフをかいて考えていきます。

不等式の問題は、グラフをかいて考えると簡単になることが多いです。とくに絶対値がらみの不等式ではグラフをかくと簡単になることが多いです。

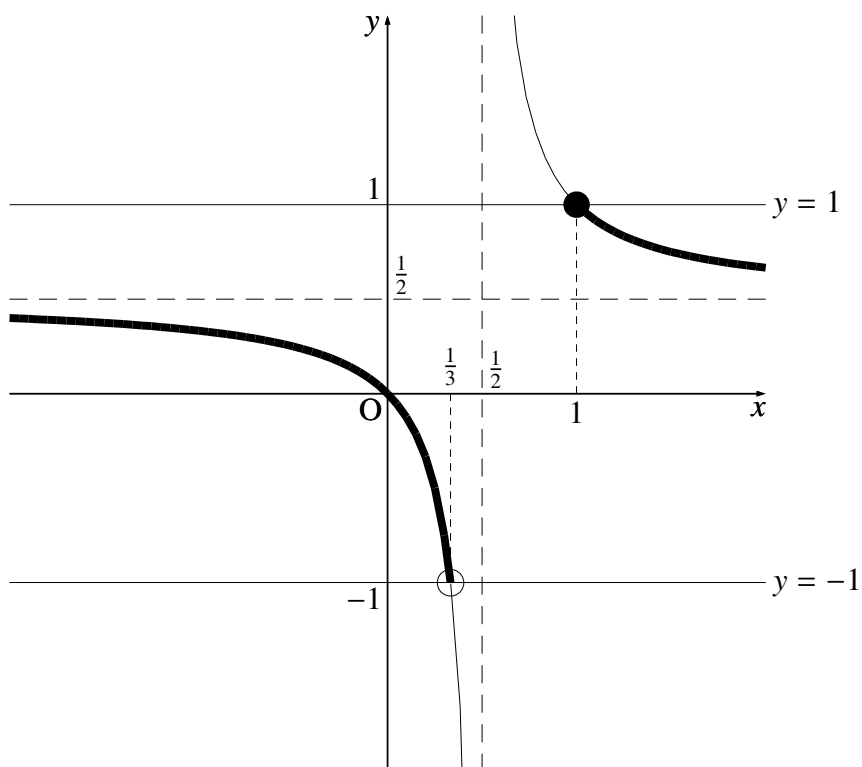
$y = \frac{x}{2x-1}$ のグラフがやや複雑なので、今回の不等式を解くとき、この解法はあまりおすすめではありません。ただ、このグラフをかいて不等式を解くという方法は、他の不等式を解くときに非常に重要になることもあるので、しっかりと理解しておいてください。

それでは、グラフをかいて解く解法にうつります。まずは、 $y = \frac{x}{2x-1}$ のグラフをかいたための式変形をしていきます。

$$\begin{aligned}
y &= \frac{x}{2x-1} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(2x-1) + \frac{1}{2}}{2x-1} \\
&= \frac{\frac{1}{2}(2x-1)}{(2x-1)} + \frac{\frac{1}{2}}{2x-1} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2x-1)} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}
\end{aligned}$$

ちょっとややこしい式変形をしたけど、なぜこんなことをしたかというとグラフをかける形に変更しただけです。この変形により $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{4\left(x-\frac{1}{2}\right)}$ となって、これは $y = \frac{1}{4x}$

のグラフを x 軸方向に $\frac{1}{2}$ 、 y 軸方向に $\frac{1}{2}$ だけ平行移動したグラフということが分かります。



$y = \frac{x}{2x-1}$, $y = 1$, $y = -1$ のグラフをかきました。今回求める不等式は $-1 < \frac{x}{2x-1} \leq 1$ です。 $y = \frac{x}{2x-1}$ のグラフが $y = -1$ のグラフの上側にあり、 $y = 1$ のグラフの下側にあるような x の値の範囲を求めればOKです。

よって、今回の不等式の解は、 $x < \frac{1}{3}$, $1 \leq x$ です。

グラフをかくとこういうふうに視覚的に解くことができ非常にラクです。ただ、今回の場合は、少しグラフをかくのが面倒だったよね。不等式を解くときは、何がなんでもグラフで解くというのではなく、その場その場で柔軟に考えられるようになっておいてください。

【不等式の解法3の説明】

今回の不等式ですが、 $r = \frac{x}{2x-1}$ とすると $-1 < r \leq 1$ です。右側に等号がなければ $-1 < r < 1 \Leftrightarrow |r| < 1$ とできます。

これだと計算がかなりラクになります。絶対値については大丈夫だと思うけど、忘れている人もいます。以下のことを、覚えておいてください。

絶対値の性質

$$(i) |AB| = |A||B|$$

$$(ii) \left| \frac{B}{A} \right| = \frac{|B|}{|A|}$$

$$(iii) |-A| = |A|$$

$$(iv) |A|^2 = A^2$$

$$\left| \frac{x}{2x-1} \right| < 1$$

$$\frac{|x|}{|2x-1|} < 1 \quad \leftarrow \text{絶対値の性質 (ii) より}$$

$$|x| < |2x-1| \quad \leftarrow \text{両辺に } |2x-1| (> 0) \text{ をかけた!}$$

$$|x|^2 < |2x-1|^2 \quad \leftarrow A > 0 \text{ かつ } B > 0 \text{ のとき、} A > B \Leftrightarrow A^2 > B^2 \text{ より}$$

$$x^2 < (2x-1)^2 \quad \leftarrow \text{絶対値の性質 (iv) より}$$

$$x^2 < 4x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 4x + 1 > 0$$

$$(x-1)(3x-1) > 0$$

$$x < \frac{1}{3}, 1 < x$$

$x < \frac{1}{3}, 1 < x$ は $x \neq \frac{1}{2}$ をみたく。よって、不等式 $\left| \frac{x}{2x-1} \right| < 1$ の解は $x < \frac{1}{3}, 1 < x$ となる。

* $\left| \frac{x}{2x-1} \right|$ ときている時点で、分母は0ではないです。つまり、 $x \neq \frac{1}{2}$ です。

上記で、不等式の両辺に $|2x-1|$ をかけて分数をなくしました。ここで、同値性が崩れています。

$\frac{|x|}{|2x-1|} < 1 \Rightarrow |x| < |2x-1|$ はいえませんが、 $\frac{|x|}{|2x-1|} < 1 \Leftarrow |x| < |2x-1|$ はいえません。こういう同値性に常に気を付けるようにしてくださいね。

だから、このときも最終的な答えに $2x-1 \neq 0$ を考えないといけません。忘れないようにしてください。

もとの不等式は、 $-1 < \frac{x}{2x-1} \leq 1$ です。これは、 $-1 < \frac{x}{2x-1} < 1$ または $\frac{x}{2x-1} = 1$ と同値です。

$-1 < \frac{x}{2x-1} < 1$ は先ほど解いた通りで $x < \frac{1}{3}, 1 < x$ となり、 $\frac{x}{2x-1} = 1$ を解くと $x = 1$ で合わせると $x < \frac{1}{3}, 1 \leq x$ です。

3種類の解法で不等式をときました。いずれも重要な解法です。特に、3番目の絶対値の解法は知らなかった人も多いと思います。ただ、この解法は次に勉強をする無限等比級数の問題でもたまに使う解法で、この解き方を知っておかないと計算が本当に大変！ということが少なくありません。

やっていることとしては、それほど難しくありません。今のうちに、しっかりと覚えておいてください。

【問題 15 の解答】

数列 $\left\{ \left(\frac{2}{2x-1} \right)^2 \right\}$ が収束するとき、 $-1 < \frac{x}{2x-1} \leq 1$ をみます。

この不等式を解くと、 $x < \frac{1}{3}, 1 \leq x$ となる。

*不等式は、先ほどの3つの解法の好きなもので解いてください。ただ、3つとも重要な解法です。すべてしっかりと理解しておいてくださいね。

以上より、求める x の値の範囲は $x < \frac{1}{3}, 1 \leq x$ となる。

問題 16 (A) 教科書

次の極限を求めよ。ただし、 $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{4} \qquad (2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad (3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{n}{2} \right]}{n+1}$$

【問題 16 の解説】

今回の問題は、直接極限を求めることができません。そんなときは、次の事柄を使って解いていきます。

はさみうちの原理

すべての n について $a_n \leq b_n \leq c_n$ が成立していて、かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A$ であるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A$ となる。

【注】 上記の $a_n \leq b_n \leq c_n$ はイコールはあってもなくてもどちらでも成立します。
 $a_n \leq b_n < c_n$ のように片方にだけイコールが含まれる場合でも成立します。

このはさみうちの原理は、高校数学の範囲では示すことができないので感覚的に理解していれば十分です。常に、 $a_n \leq b_n \leq c_n$ が成立していて、 a_n も c_n も A に収束、つまり A に限りなく近づいていくんだから、 a_n と c_n の間にある b_n も A に近づいていっちゃう、そんな理解でいいと思いますよ。

「どんなときに、はさみうちの原理を使うの?」と思った人もいると思います。答えは「直接極限を求めることができないとき」です。

これまで、このプリントでいろいろと数列の極限の問題を解いてきたよね。例外はないとは言えないですが、これまで解いてきたもので、ほとんどの解き方が網羅されています。ですから、ここまでやってきた解き方で解けないときは、「ひょっとしてはさみうちの原理を使うのかな?」と思えるようになってください。

まあ、慣れてくればいつかはさみうちの原理を使えばよいか分かってくると思うので、それほど気にする必要はないと思います。ちなみに、実際の大学受験で出題される極限の問題（特に国立の2次試験といった本格的な記述問題）では、「はさみうちの原理を使っ

て解く」ことが非常に多いです。

はさみうちの原理を使わずに、直接極限を求める問題はどちらかというと少数派です。はさみうちの原理はそれほど重要ですので、頑張ってくださいね。

完全な余談ね。高校生のとき、はじめて「はさみうちの原理」を聞いたとき、もっとまじな読み方はないのかな？なんて思っていました。「全然、数学っぽくないじゃん」なんて気持ちです。

「はさみうちの原理」は「はさみうちの定理」と呼ぶこともあります。どちらでもいいと思いますが、最近の高校数学では、「はさみうちの原理」を使うことが多いです。

ちなみに定理は証明されたもの、原理は元々自明なものです。高校数学では、はさみうちは証明することができないので、「はさみうちの原理」と呼ぶことが多いのかな？よく知りません… テキトウなこと言ってごめんなさいね。それでは、本題に戻ります。

はさみうちの原理は自分で不等式を作っていないとダメなんだけど、不等式の作り方としては、今回のようにある程度決まりきった方法があります。それは、覚えておかないといけません。

難しいのは、その場で考えて、不等式を自分で作っていく問題。これが入試問題でよく出てきます。ただ、入試でも、今回の問題のように不等式を自分で機械的に作ることができる、簡単な問題もよく出てくるので、不等式の作り方を覚えておいてくださいね。

【問題 16 (1) の解説】

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{4}$ の極限を直接求めることは無理です。これは、関数の極限で勉強をすることですが、三角関数を含んだ極限で唯一使える公式は $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ のみです。

三角関数を含んだ極限で、この公式で極限值を求めることができないときは、「はさみうちの原理」を使って求めていきます。

今の段階では、もちろんこの公式を使えるかどうかは分からないと思うけど、とりあえず「公式では求められない」ということが分かったとしておきます。ですから、はさみうちの原理を使って解いていきます。

それでは、はさみうちの原理を使って解いていきます。はさみうちの原理は、不等式を作るというのがひとつのポイントです。

\sin や \cos は当然ですけど、 -1 以上 1 以下という条件があります。だから、 $-1 \leq \sin \frac{n\pi}{4} \leq 1$ という不等式が成立します。これをつかってはさみうちの原理で使う不等式をつくり出します。

$$-1 \leq \sin \frac{n\pi}{4} \leq 1$$

$n > 0$ のとき

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{4} \leq \frac{1}{n} \quad \leftarrow n > 0 \text{ より } \frac{1}{n} > 0 \text{ よって不等号の向きは変わらない!}$$

↑ 不等式に文字式をかけるときは、かならず正負を考えるようにしてくださいね。

これで不等式をつくれました。あとは、はさみうちの原理を使って解いていくだけです。それでは、解答に進みます。

【問題 16 (1) の解答】

$$-1 \leq \sin \frac{n\pi}{4} \leq 1$$

$n > 0$ のとき

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{4} \leq \frac{1}{n} \quad \leftarrow n > 0 \text{ より } \frac{1}{n} > 0 \text{ よって不等号の向きは変わらない!}$$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

はさみうちの原理より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{4} = 0$

【問題16(2)の解説】

この問題もはさみうちの原理を使って解いていきます。はさみうちの原理を使うためには、不等式を作らないとダメです。

で、今回みたいな場合の問題もよく出てくるんだけど、 $(-1)^n$ は $-1, 1, -1, 1, \dots$ を繰り返すよね。だから、当然 $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ が成立します。

こういうことをすると、 $(-1)^n = \pm 1$ の繰り返しなのに、そんな不等式使っていいのですか？なんて質問をうけることがあります。でも、OKなんです。-1や1は、当然-1以上、1以下の数だよ。だから、 $-1 \leq \pm 1 \leq 1$ という不等式は成立します。

違和感ありありなんだけど（慣れてくれば当然なんですけど、最初のうちは難しいと思うよ）、はさみうちの原理を使うには、不等式を作るしかない。だから、頑張って不等式を作った。というだけです（うまく説明できなくてごめんなさいね。ただ、全部理解しようと思わずに、ある程度のところで割り切って進めていけば、そのうちに分かってくると思いますよ）。

【問題16(2)の解答】

$$-1 \leq (-1)^n \leq 1$$

$n > 0$ のとき

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \leftarrow n > 0 \text{ より } \frac{1}{n} > 0 \text{ よって不等号の向きは変わらない！}$$

$$\text{ここで、} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{n}\right) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\text{はさみうちの原理より、} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

【問題16(3)の解説】

$[x]$ は、ガウス記号と言って「 x を超えない最大の整数」を表します。教科書に載せなくてもよい事柄（といっても、ほとんどの教科書で、このガウス記号は掲載されていると思いますが）なので、大学受験に出るときは、必ず「 x を超えない最大の整数」と説明を加えられています。

ガウス記号について

$[x]$ は、 x を超えない最大の整数を表す。また、不等式 $x - 1 < [x] \leq x$ が成立する。

極限の問題でガウスが出題されたとき、ほとんどの場合上記の、 $x - 1 < [x] \leq x$ を使ってはさみうちの原理を使って、解いていきます。

で、この式なんですけど覚えてもらってもいいですし（ガウスの意味を考えれば当たり前だよ）なんて言う人もいますが、勘の鈍い僕はどう覚えにくかったです。そこで、ガウス記号はあまり出てくるものでもないですし、毎回導いています（暗記で解くと間違えて暗記していたら困る！）。以下のように毎回導いています。

$[x]$ は「 x を超えない最大の整数」なんて書かれています、言い換えると「 x の整数部分のこと」です。

すべての実数には「(実数)=(整数部分)+(小数部分)」という性質があります。今回の場合、小数部分を b で表し、また小数部分は 0 以上 1 未満の数であるとします。

$$x = [x] + b \text{ より } b = x - [x] \cdots \textcircled{1}$$

① を $0 \leq b < 1$ に代入すると、 $0 \leq x - [x] < 1$ この不等式を $[x]$ について解くと、 $x - 1 < [x] \leq x$ が導けます。ガウスはあまり出てこないし、簡単に導けるので、僕のように毎回導く方法でもいいと思いますよ。

【問題 16 (3) の解答】

$$\frac{n}{2} - 1 < \left[\frac{n}{2} \right] \leq \frac{n}{2} \quad \leftarrow \text{ガウスのみたす不等式 } x - 1 < [x] \leq x \text{ で、} x \text{ を } \frac{n}{2} \text{ で置き換えた！}$$

$$\frac{n-2}{2} < \left[\frac{n}{2} \right] \leq \frac{n}{2} \quad \leftarrow \text{左辺を通分して計算した！}$$

$n + 1 > 0$ のとき

$$\frac{n-2}{2(n+1)} < \frac{\left[\frac{n}{2} \right]}{n+1} \leq \frac{n}{2(n+1)} \quad \leftarrow \text{すべての辺を } n+1 \text{ で割った}$$

$$\text{ここで、} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-2}{2(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{2}{n}}{2\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\text{はさみうちの原理より} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[\frac{1}{2}n\right]}{n+1} = \frac{1}{2}$$

cf 【ちょっとややこしい話】

このガウス記号というのは日本の大学受験でしかあまり使われない言葉みたいです。数学の世界では、 x の小数部分を切り捨てた整数（意味としてはこれがガウス記号と等しい）を $[x]$ で表し、 x の小数部分を切り上げた整数を $\lceil x \rceil$ といいます。これに関する大学受験も出たことがあるみたいですので、興味のある人は覚えておいてください。

問題 17 (B)

実数 x に対して $[x]$ を $m \leq x < m + 1$ を満たす整数 m とする。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}}$$

を求めよ。

(山梨大学)

【問題 17 の解説】

なんだかややこしそうに見えるけど、簡単な問題ですよ。

まずは、この問題もさっきの問題 16 (3) と同じようにガウス記号が含まれているよね。そんなときは、 $x - 1 < [x] \leq x$ で不等式を作り、はさみうちの原理で解くだけです。

今回は、 $[10^{2n}\pi]$ なので、 $x - 1 < [x] \leq x$ の x に $10^{2n}\pi$ を代入したら、あとははさみうちの原理で解けてしまいます。

ただ、今回の問題では問題で「実数 x に対して $[x]$ を $m \leq x < m + 1$ を満たす整数 m とする」と書かれているので、これを使って解いていきます。

ちょっとややこしいかもしれないけど、しっかりと問題文を読んでね。「 $[x]$ を $m \leq x < m + 1$ を満たす整数 m とする」と書かれています。「 $[x]$ を m とする」と書かれているんだから、 m のところに $[x]$ を入れます。

そうすると $m \leq x < m + 1$ は $[x] \leq x < [x] + 1$ だってことが言えます。

さらに今回の問題では、 $x = 10^{2n}\pi$ なんだから、 $[x] \leq x < [x] + 1$ は $[10^{2n}\pi] \leq 10^{2n}\pi < [10^{2n}\pi] + 1$ となりますよ。

ガウス記号は、大学受験としては「当然知っているもの」として使っていってもらってもいいのですが、今回のように問題で定義が与えられている場合、問題の定義にしたがって解いていったほうが無難です。

【問題 17 の解答】

$m \leq x < m + 1$ に $m = [10^{2n}\pi]$, $x = 10^{2n}\pi$ を代入する。

$$[10^{2n}\pi] \leq 10^{2n}\pi < [10^{2n}\pi] + 1$$

$$\Leftrightarrow [10^{2n}\pi] \leq 10^{2n}\pi < [10^{2n}\pi] + 1$$

$$\Leftrightarrow 10^{2n}\pi - 1 < [10^{2n}\pi] \leq 10^{2n}\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{10^{2n}\pi - 1}{10^{2n}} < \frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}} \leq \frac{10^{2n}\pi}{10^{2n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{10^{2n}\pi - 1}{10^{2n}} < \frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}} \leq \pi$$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{10^{2n}\pi - 1}{10^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi - \frac{1}{10^{2n}} \right) = \pi$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi = \pi$

はさみうちの原理より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[10^{2n}\pi]}{10^{2n}} = \pi$

問題 18 (B) 教科書

次の極限を求めよ。ただし、「 $a > 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ 」は既知とする

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(3^n + 2^n)$

【問題 18 (1) の解説】

このタイプの問題は、頻出です。これもはさみうちの原理を使って解いていきます。はさみうちの原理を使うために、不等式を作らないとだめだったよね。

ただこの不等式の作り方は、知らないと思いつきにくいので、解法を覚えてしまってください。よく出てきますが、ワンパターンなので、覚えてしまえば簡単ですよ。

まず、最初に n 乗根の中身を $3^n + 2^n = 3^n \left\{ 1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}$ と変形します。

これより

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{3^n + 2^n} &= \sqrt[n]{3^n \left\{ 1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}} = \left(3^n \left\{ 1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\} \right)^{\frac{1}{n}} = (3^n)^{\frac{1}{n}} \left\{ 1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}^{\frac{1}{n}} \quad \leftarrow \text{指数法則 } (xy)^m = x^m y^m \text{ を使った!} \\ &= 3 \left\{ 1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}^{\frac{1}{n}} \quad \leftarrow \text{指数法則 } (x^m)^n = x^{mn} \text{ より、} (3^n)^{\frac{1}{n}} = 3^{n \cdot \frac{1}{n}} = 3 \text{ より} \end{aligned}$$

とりあえずここまで式変形をしました。ここからはさみうちの原理を使えるように不等式を作っていきます。ここからの式変形が忘れやすいのでしっかりと覚えておいてください。

まず、 $\left(\frac{2}{3} \right)^n$ は 0 よりも大きく 1 よりも小さい数です。ですから、 $0 < \left(\frac{2}{3} \right)^n < 1$ が成立します。

そして、すべての辺に 1 を加えます。 $1 < 1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n < 2$

さらに、この式をすべて $\frac{1}{n}$ 乗します。今回の場合、すべての辺が正ですので、 $\frac{1}{n}$ 乗しても大小関係は変わらないので、不等式の向きは変わりません。

$$1^{\frac{1}{n}} < \left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}} \text{ となります。}$$

これではさみうちの原理を使える形になりました。

問題で、 $a > 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ と書かれているので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1$ です。

解説を読んだらすぐにできると思います。けど、「こんなの聞いたら分かるけど、その場で思いつくなんて無理！」と言う人がいます。

確かにそうですよ。だから、覚えてください。

この問題に限った話ではないですが、数学には有名問題があります。そういった問題は、その場で考えて解くのではなくて覚えておかないと、無理ということが多いですよ。大変だと思うけど、こういったことはひとつずつ覚えていってくださいね。

【問題 18 (1) の解答】

$$\sqrt[n]{3^n + 2^n} = \sqrt[n]{3^n \left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}} = \left(3^n \left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}\right)^{\frac{1}{n}} = (3^n)^{\frac{1}{n}} \left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} = 3 \left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}}$$

ここで

$$0 < \left(\frac{2}{3}\right)^n < 1$$

$$1 < 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n < 2$$

$$1 < \left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}}$$

$$3 < 3 \left\{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}^{\frac{1}{n}} < 3 \cdot 2^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3 = 3, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 2^{\frac{1}{n}} = 3 \quad (\because \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} = 1)$$

はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \left\{ 1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}^{\frac{1}{n}} = 3$

【問題18 (2) の解答】

*これは (1) の結果を使えば簡単です。それでは、答案に進みます。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(3^n + 2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log(3^n + 2^n)^{\frac{1}{n}}$$

(1) より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (3^n + 2^n)^{\frac{1}{n}} = 3$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(3^n + 2^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \log(3^n + 2^n)^{\frac{1}{n}} = \mathbf{\log 3}$ となる。

【注意】

(2) の答案、すつきとしない人も多いと思います。

(2) は何をしたかという、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \log a_n = \log \alpha$ としました。

こんなことしてOKなの？と思うかもしれませんが、結論から言えば関数が連続であれば大丈夫です。関数 $\log x$ は $x > 0$ において連続なので、代入することができます。

——— 極限について ———

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が収束する。このとき、関数 $f(x)$ が連続なとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n)$ となる。これは、今後勉強をする関数の極限でも成立します。

本当に丁寧に言えば上記の通りです。答案にも書いておいた方がいいのかもしれませんが、高校数学の範囲で出てくる関数はほぼすべてが連続です。ですから、ほとんどの場合で上記が成立します。また、連続という表現を書かなくてもおそらく減点されないと思います。

理学部数学科などの志望の場合は厳密な答案が必要になってくるので、書いておいた方がよいかもしれません。

問題 19 (B)

$a > 0, b > 0$ とする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n}$ の極限值を求めよ。

【問題 19 の解説】

この問題は、先ほどの問題 18 とほとんど同じ問題です。

問題 18 では、最初に n 乗根の中身を $3^n + 2^n = 3^n \left\{ 1 + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right\}$ と 3^n でくくり出しました。

こういった問題は大きい方でくくり出すとうまくいきます。2 と 3 を比べて 3 の方が大きいから、問題 18 では 3^n でくくり出しました。

今回の問題も a と b の大きい方でくくり出します。ただ、 a と b 大小関係が分からないので、場合分けが必要です。

【注】

今回の問題は、問題 18 と違って「 $a > 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ は既知」と書かれていません。

ですが、この問題を書くためにはこの事実を使わないといけません。だから、問題で何もなくても使ってもらって OK です。

極限って、このあたりがすごくあいまいです。与えられていたり、与えられていなかったりでよくわかりません。出題者が「どこまで既知としてよいか」という感覚が違うため、こんなことが起きてしまっています。

ただ、慣れてきたらある程度わかってきます。「なんだか、腑に落ちないな」と思う人もいると思います。でも、「まあ、そんなものだ」と割り切って進めるようにしてください。

【問題19の解答】

(i) $a > b$ のとき

$$\sqrt[n]{a^n + b^n} = \sqrt[n]{a^n \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n \right\}} = \left(a^n \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n \right\} \right)^{\frac{1}{n}} = (a^n)^{\frac{1}{n}} \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n \right\}^{\frac{1}{n}} = a \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n \right\}^{\frac{1}{n}}$$

ここで $0 < b < a$ より $0 < \left(\frac{b}{a}\right)^n < 1$ がいえる。

$$0 < \left(\frac{b}{a}\right)^n < 1$$

$$1 < 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n < 2$$

$$1 < \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n \right\}^{\frac{1}{n}} < 2^{\frac{1}{n}}$$

$$a < a \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n \right\}^{\frac{1}{n}} < a \cdot 2^{\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a \cdot 2^{\frac{1}{n}} = a$$

はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left\{ 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^n \right\}^{\frac{1}{n}} = a$

(ii) $a = b$ のとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2a^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} a = a$$

(iii) $a < b$ のとき

(i) と同様に考えて、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = b$

以上より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \begin{cases} a & (a \geq b \text{ のとき}) \\ b & (a < b \text{ のとき}) \end{cases}$

今回の問題はよく出てきます。はさみうちの原理から求めるのですが、結果自体を覚えておいてください。

$\sqrt[n]{a^n + b^n}$ の極限について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \begin{cases} a & (a \geq b \text{ のとき}) \\ b & (a < b \text{ のとき}) \end{cases}$$

問題 20 (B)

関数 $f(x) (x > 0)$ を

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{(7x+6)^n + (9x)^n}$$

により、定める。「正の実数 a に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ 」ということなどから、

$0 < x \leq$ のときには $f(x) =$ $x +$ であり、

$x >$ のときは $f(x) =$ $x +$ であることが分かる。

(東京理科大学)

【問題 20 の解説】

この問題は、2010年の東京理科大学理学部の過去問です。マークセンスの問題ですので、答えのみの記入とします。

この問題は、どういうふうに解くか分かるよね？これは、問題19で書いた

$\sqrt[n]{a^n + b^n}$ の極限について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \begin{cases} a & (a \geq b \text{ のとき}) \\ b & (a < b \text{ のとき}) \end{cases}$$

を使って解いていくだけです。それでは、解答に移りますが、解答も上記の事実を既知として解いていきます。

【問題 20 の解答】

$x > 0$ のもとで、 $7x+6 \geq 9x$ つまり $0 < x \leq 3$ のとき、 $f(x) = 7x+6$

$7x+6 < 9x$ つまり $3 < x$ のとき、 $f(x) = 9x$

答え

ア = 3 イ = 7 ウ = 6 エ = 9 オ = 0

問題 2 1 (C) 教科書

- (1) $h > 0$ であるとき、 $(1 + h)^n > 1 + nh$ を示せ。ただし、 n は 2 以上の整数。
(2) $r > 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ であることを示せ。

【問題 2 1 の解説】

問題 1 2 で勉強をした、「 $r > 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ になることを示せ」という問題です。「そんなの、当たり前じゃん」と思う人もいると思いますが、当たりの証明ほど難しいんですよ。

これから、何問か極限の証明問題を解いていきます。数列の極限の証明問題は、ほとんどの場合 2 項定理を使って解いていきます。2 項定理は大丈夫だと思うけど、忘れていたら困るので一応まとめておきます。

2 項定理について

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k a^{n-k} b^k \\ &= {}_n C_0 a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} a b^{n-1} + {}_n C_n b^n \\ &= a^n + {}_n C_1 a^{n-1} b + {}_n C_2 a^{n-2} b^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} a b^{n-1} + b^n \quad \leftarrow {}_n C_0 = 1, {}_n C_n = 1 \text{ です。}\end{aligned}$$

とりあえず $(1 + h)^n$ を 2 項定理を使って展開してみます。

$$\begin{aligned}(1 + h)^n &= 1^n + {}_n C_1 1^{n-1} h + {}_n C_2 1^{n-2} h^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} 1 \cdot h^{n-1} + h^n \\ &= 1 + {}_n C_1 h + \underline{{}_n C_2 h^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} h^{n-1} + h^n}\end{aligned}$$

で、今回は $h > 0$ です。そして、 ${}_n C_k$ はすべて正の数だよ。ということは、上記の下線部 ${}_n C_2 h^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} h^{n-1} + h^n$ の各項はすべて正です。なので、 ${}_n C_2 h^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} h^{n-1} + h^n > 0$ が成立します。

このことより、 $1 + {}_n C_1 h + {}_n C_2 h^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} h^{n-1} + h^n > 1 + {}_n C_1 h$ が成立します。 $1 + {}_n C_1 h = 1 + nh$ より、これで (1) の証明終了です。それでは、解答に移ります。

【問題 2 1 (1) の解答】

$n \geq 2$ のとき、 $(1+h)^n$ を 2 項定理を使って展開する。

$$(1+h)^n$$

$$= 1 + {}_n C_1 h + {}_n C_2 h^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} h^{n-1} + h^n$$

ここで $h > 0$ より、 ${}_n C_2 h^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} h^{n-1} + h^n > 0$ となる。

よって $(1+h)^n > 1+nh$ (証明終)

【注】

「どうして $n \geq 2$ なの? $n \geq 1$ だったらダメなの?」と思う人もいます。 $n = 1$ のとき $(1+h)^n = (1+h)^1 = 1+h$ となります。

今回は、 $(1+h)^n = 1+nh + {}_n C_2 h^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} h^{n-1} + h^n$ で、青い部分 ${}_n C_2 h^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} h^{n-1} + h^n > 0$ で解いていきました。ところが、 $n = 1$ のときは、この青い部分は 0 となります (というか存在しない。だから、0 として扱う)。ですから、 $n \geq 1$ のときは、 $(1+h)^n > 1+nh$ ではなく等号を含んだ、 $(1+h)^n \geq 1+nh$ となります。

【問題 2 1 (2) の解説】

感覚的に当たり前ですが、次の性質が成立します。

追い出しの原理

数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ がつねに $a_n \leq b_n$ が成立している (はさみうちの原理と同じく、等号はあってもなくてもどちらでもよい)。

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ がいえる。

これもはさみうちの原理と同じく感覚的に理解できるよね。ただ、これも高校数学では証明ができません。

それから、大学受験の問題で（１）、（２）と設問が並んでいるとき（２）を解くときは、前問の結果を使って解いていくということが多いです。重要なことなので、しっかりと頭にたたき込んでおいてください。今回の（２）の問題も（１）を使って解いていきます。

【問題 2 1 の解答】

$r > 1$ のとき、正の数 h を使って $r = 1 + h$ と表せる。（１）より、 $n \geq 2$ のとき、

$$r^n = (1 + h)^n > 1 + nh$$

$n \rightarrow \infty$ のとき、 $n \geq 2$ をみताす。

↑ $n \rightarrow \infty$ のとき、当然 $n \geq 2$ となる。これで（１）で示した結果を使える！

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + nh) = \infty$$

よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + h)^n = \infty$

↑ 追い出しの原理を使った。「追い出しの原理より」と答案にはかかなくていいです。もちろん、書いてもらってもOKです。一方、はさみうちの原理は、「はさみうちの原理より」と書くことが多いですが、何も書かなくてもOKです。むしろ、受験レベルでは、書かない人の方が多い？と思えます。書いても書かなくても、どちらでもいいですよ。

以上より、 $r > 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = \infty$ となる。（証明終）

この問題、問題のランクを(C)にしました。「こんなの(C)じゃなくて(A)だ」なんて言われるかもしれません。でも、知らなかったら、難しいよね。

本来は、定理とは証明されたものなので、定理を使うときはその定理を示せることが前提です。だから、学校では「示せないと意味がない！」なんて先生が言い続けます。

ただ、そうはいつでも定理の証明は難しいんです。しかも、あまり大きな声では言えないけど、「定理の証明って大学受験ではあまり出てこない」だから、大学受験のことだけを考えると、証明なんかできなくても定理を使って解ければいいんです。

難関大学では定理を示せという問題はよく出てきます。東大で三角関数の加法定理を示せ、とかお茶の水女子大学でシュワルツの不等式を示せなんていう問題も、出題されています。

数学の苦手な人は証明なんかほっておいてまずは問題を解けることに優先順位をおいたらいいと思いますよ。それで、慣れてきてから定理の証明に移れば大丈夫です。

問題 2 2 (C)

- (1) $h > 0$ であるとき、 $\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n > 1 + h$ を示せ。ただし、 n は 2 以上の整数。
(2) $a > 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ であることを示せ。

【問題 2 2 の解説】

問題 1 8 で、 $a > 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ は既知と書かれていましたが、これを証明しなさいという問題です。ちなみに、 a^x は連続関数なので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = a^0 = 1$ としてもよいように感じますが、これでは厳密な証明にはなっていません（理由は、高校数学の範囲を超えてしまいます。とりあえず、「高校数学の範囲では証明できない」と思ってください）。

こういう極限を示すには、2 項定理を使ってはさみうちに持ち込むと言うことが常套手段です。

(1) は先ほどの問題 2 1 (1) とほとんど同じです。

【問題 2 2 (1) の解答】

$n \geq 2$ のとき、 $\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n$ を 2 項定理を使って展開する。

$$\begin{aligned} & \left(1 + \frac{h}{n}\right)^n \\ &= 1 + {}_n C_1 \frac{h}{n} + {}_n C_2 \left(\frac{h}{n}\right)^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} \left(\frac{h}{n}\right)^{n-1} + \left(\frac{h}{n}\right)^n \end{aligned}$$

ここで $h > 0$ より、 ${}_n C_2 \left(\frac{h}{n}\right)^2 + \cdots + {}_n C_{n-1} \left(\frac{h}{n}\right)^{n-1} + \left(\frac{h}{n}\right)^n > 0$ となる

よって、 $\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n > 1 + {}_n C_1 \frac{h}{n} = 1 + h$ が成立する。(証明終)

【問題 2 2 (2) の解説】

この問題は、(1) の結果を使ってといていきます。受験問題で、(1)、(2) となっているとき、(2) を解くときに (1) の結果を使って解いていくことが多かったんだよね。

今回は $a > 1$ という条件を使うために $a = 1 + h$ と置き換えて解いていきます。

*この $a = 1 + h$ とおくところがポイントです。 $h > 0$ のとき、 $1 + h > 1$ つまり $a > 1$ を満たしています。

よって、 $a = 1 + h$ と置き換えてよいということは理解できると思います。ただ、こんな知らなかったらなかなか思いつけないよ。単純に暗記することにしてください。

(1) で示した式 $\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n > 1 + h$ は $a = 1 + h$ のとき、 $\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n > a$ となります。両辺ともに正なので、両辺を $\frac{1}{n}$ 乗すると、 $1 + \frac{h}{n} > \sqrt[n]{a}$ つまり $\sqrt[n]{a} < 1 + \frac{h}{n}$ が成立します。

で、ここからなんですけど、はさみうちの原理を使って解いていきたいんだよね。はさみうちの原理を使って解くときは $a_n < b_n < c_n$ という不等式を作らないといけない。

今回の場合、(1) の誘導で $\sqrt[n]{a} < 1 + \frac{h}{n}$ と作ることができました。でも、これではまだはさみうちの原理を使えない。はさみうちの原理を使える形にするために、 $0 < \sqrt[n]{a} < 1 + \frac{h}{n}$ の $0 < \sqrt[n]{a}$ を自分で作っていかないといけません。

今回の問題は、極限値が 1 になるっていうことは分かっているよね。だから、左側の 0 にも極限値が 1 になるものがこないとまずいです。で、今回の場合、どうしようかな？ と考えるんだけど左側の 0 の部分には 1 がきます。

$1 < a \Leftrightarrow 1^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow 1 < \sqrt[n]{a}$ が言えます。

まあ、今回の場合、こんな丁寧の説明をしなくてもわかった人も多いと思います。なぜ丁寧にしたかという、今回片方の $\sqrt[n]{a} < 1 + \frac{h}{n}$ は誘導が与えられているので作ること

ができました。もう一方の方は、誘導がないから自分で作りなさいよということなんだよね。こんなとき、ひらめきが必要な難しいものはあまりありません（もし、難しかったら誘導が与えられているはず）。

簡単に気づけるものだから誘導をつけるほどのものでもないということです。今後、数学の大学受験の問題を解いていきますが、こういった考え方は非常に重要になってきます。「誘導がない」ということは「突飛な発想は必要ない可能性が高い」という考え方で解いていきます。

【問題 2 2 (2) の解答】

$a > 1$ のとき、 a は正の数 h を使って $a = 1 + h$ と表せる。(1) より、 $n \geq 2$ のとき、

$\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n > 1 + h$ となる。これに、 $a = 1 + h$ を代入すると $\left(1 + \frac{h}{n}\right)^n > a$ となる。

両辺ともに正より $\sqrt[n]{a} < 1 + \frac{h}{n} \dots \textcircled{1}$

また、 $1 < a$ より $1 < \sqrt[n]{a} \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より $1 < \sqrt[n]{a} < 1 + \frac{h}{n}$ が成立する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{h}{n}\right) = 1$$

はさみうちの原理より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$

【注】

この問題では、 $a > 1$ としましたが $a > 0$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ が成立します。

$1 < (1 + h)^{\frac{1}{n}} < 1 + \frac{h}{n}$ で逆数をとると、正の数 h のとき逆数をとると大小関係が入れ替わることに注意して、 $\frac{1}{1 + \frac{h}{n}} < \frac{1}{(1 + h)^{\frac{1}{n}}} < 1 \dots \textcircled{*}$ が成立します。

ここで、 $\frac{1}{(1+h)^{\frac{1}{n}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{1+h}}$ より、 $\textcircled{*}$ は、 $\frac{1}{1+\frac{h}{n}} < \sqrt[n]{\frac{1}{1+h}} < 1$ と変形できます。

$0 < a < 1$ のとき、 $a = \frac{1}{1+h}$ とすることにより $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ 示すことができます。

問題 2 3 (C)

- (1) $h > 0$ であるとき、 $(1+h)^n \geq 1+nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$ を示せ。ただし、 n は自然数。
(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ であることを示せ。

【問題 2 3 (1) の解説】

同じような問題が続くので、もう飽きちゃったかもしれませんがこれでラストです。最後まで頑張ってくださいね。

今回も 2 項定理を使って証明していきます。

$$\begin{aligned}(1+h)^n &= 1^n + {}_nC_1 1^{n-1}h + {}_nC_2 1^{n-2}h^2 + {}_nC_3 1^{n-3}h^3 \cdots + {}_nC_{n-1} 1 \cdot h^{n-1} + h^n \\ &= 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3 + \cdots + nh^{n-1} + h^n\end{aligned}$$

単純に 2 項定理を使って展開しただけなんだけど、上記の下線がついている部分の $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3 + \cdots + nh^{n-1} + h^n$ って、各項がすべて 0 より大きいから、下線部全体も当然 0 より大きくなるよね。

だから、 $(1+h)^n > 1+nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$ が成立します。

ただ、ちょっと気をつけて欲しいんだけど、 $(1+h)^n$ は $n=1$ のときは $(1+h)^1 = 1+h$ となるし、 $(1+h)^2 = 1+2h+h^2$ となります。

このことより、 $1+nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3 + \cdots + nh^{n-1} + h^n$ の
下線部 $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3 + \cdots + nh^{n-1} + h^n$ は、 $n=2$ のとき 0 になります。

ですから、 $n=2$ のとき、 $(1+h)^n = 1+nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$ となります。

また、 $n = 1$ のときは、 $(1+h)^n \geq 1+nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2$ を 2 項定理を使って示すことはできないので、別に直接示しておく必要があります。それでは、解答に進みます。

【問題 2 3 (1) の解答】

$(1+h)^n \geq 1+nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \dots \textcircled{1}$ を示す。

$n = 1$ のとき、(左辺) $= (1+h)^1 = 1+h$, (右辺) $= 1+1 \cdot h + \frac{1 \cdot (1-1)}{2}h^2 = 1+h$ となる。
よって、 $\textcircled{1}$ は成立。

$n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} \text{(左辺)} &= (1+h)^n \\ &= 1^n + {}_n C_1 1^{n-1} h + {}_n C_2 1^{n-2} h^2 + {}_n C_3 1^{n-3} h^3 \cdots + {}_n C_{n-1} 1 \cdot h^{n-1} + h^n \\ &= 1+nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3 + \cdots + nh^{n-1} + h^n \geq 1+nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 \\ &\quad \left(\because n \geq 2 \text{ のとき、} \frac{n(n-1)(n-2)}{6}h^3 + \cdots + nh^{n-1} + h^n \geq 0 \right) \end{aligned}$$

よって、 $n \geq 2$ のときも $\textcircled{1}$ は成立。

以上より、すべての自然数で n で $\textcircled{1}$ は成立する。(証明終)

【問題 2 3 (2) の解答】

* (2) は、(1) で示した不等式に $h = 1$ を代入して、はさみうちの原理にもちこみます。

$1 > 0$ より、(1) で $h = 1$ としてよい。

$$(1+1)^n \geq 1+n \cdot 1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 1^2 = 1+n \cdot 1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

ここで、両辺とも正の数より逆数をとると $\frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}} \dots \textcircled{2}$

また、 $2^n > 0$ より $0 < \frac{1}{2^n} \dots \textcircled{3}$

②, ③ より、

$$0 < \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}}$$
$$\Leftrightarrow 0 < \frac{n}{2^n} \leq \frac{n}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}} \quad \leftarrow \text{すべての辺に } n(>0) \text{ をかけた。}$$

ここで、 $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{1+n+\frac{n(n-1)}{2}} = 0$

はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ となる。(証明終)

問題 2 4 (A) 数列 教科書

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, a_{n+1} - a_n = 2$

(2) $a_1 = 3, a_{n+1} - a_n = 2n$

【問題 2 4 の解説】

問題 2 4 以降は、しばらくは漸化式と数学的帰納法の問題を解いていってもらいます。単元としては数学 B の数列の問題です。

漸化式は、問題ごとにパターンが決まっています（パターンがない場合は、誘導ののり、一般項 a_n を推測してからの帰納法など）。

漸化式は解き方さえ覚えてしまえば誰でもできるのに、漸化式が解けないという人が非常に多いです。このプリントでは、解き方を覚えなさいといけなものはすべて解説します。漸化式は、覚えてしまえばそれほど難しいことはありません。覚えるまで、何度も何度も繰り返しててください。

【問題 2 4 (1) の解説】

* $a_{n+1} - a_n = (\text{一定})$ 型

$a_{n+1} - a_n = (\text{一定})$ のとき、ひとつ大きな項である a_{n+1} からひとつ小さな項である a_n を引いた値が一定。差が一定なので、等差数列です。当然一定にあてはまる部分が公差の等差数列です。

【問題 2 4 (1) の解答】

数列 $\{a_n\}$ は初項 1, 公差 2 の等差数列である。よって一般項 a_n は $a_n = 1 + (n-1) \cdot 2 = 2n - 1$

【問題 2 4 (2) の解説】

* $a_{n+1} - a_n = b_n$ 型は階差数列

(1) 同様、左辺は $a_{n+1} - a_n$ だけど右辺が n を含んでいるので、等差数列ではありません。よ。 $a_{n+1} - a_n = (n \text{ を含んだ式})$ は階差数列と言います。

階差数列について

$$a_{n+1} - a_n = b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$n \geq 2 \text{ のとき、} a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \text{ となる。}$$

【注】

階差数列のとき、 $n \geq 2$ のときとあるけど、 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ で求めた式は $n = 1$ のときも成立してくれます。(成立しないものもあるが、あくまで高校数学の問題ではほぼ確実に成立してくれています)。

ですから、 $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ で求めた式で、初項があわないときは、どこかで計算ミスをしていると思ってもらって構いません。

ちなみに、 $n \geq 2$ が出てくるもうひとつ有名な式の $S_n - S_{n-1} = a_n$ で求める式は、 a_1 は成立することもありますし、成立しないこともあります。

階差数列がなぜ成立するのか、簡単に示しておきます。

【証明】

$a_{n+1} - a_n = b_n$ の両辺に和をとる。

$n \geq 2$ のとき、 \Leftarrow 両辺の和をとって $\sum_{k=1}^{n-1}$ とするが、上の $n-1$ の部分は1以上の整数でないといけなないので、 $n-1 \geq 1$ つまり $n \geq 2$ です。

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k \text{ となる。}$$

$$\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \sum_{k=1}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \\
&= \underbrace{(a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n)}_{\leftarrow \sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} \text{ の中身を実際にかき出した}} \\
&\quad - \underbrace{(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1})}_{\leftarrow \sum_{k=1}^{n-1} a_k \text{ の中身を実際にかき出した}} \\
&= a_n - a_1 \leftarrow \text{同じ部分は互いに打ち消しあってくれる。残った部分をかき出した！}
\end{aligned}$$

よって、 $a_n - a_1 = \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ より、 $n \geq 2$ のとき $a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$ となる。

【問題 2 4 (2) の解答】

$$a_{n+1} - a_n = 2n$$

$n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}
a_n &= 3 + \sum_{k=1}^{n-1} 2k \leftarrow \text{階差数列の公式 } a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \text{ より} \\
&= 3 + 2 \cdot \frac{1}{2} (n-1) \{(n-1) + 1\} \\
&= 3 + n(n-1) \\
&= n^2 - n + 3
\end{aligned}$$

$a_n = n^2 - n + 3$ に $n = 1$ を代入すると $a_1 = 1^2 - 1 + 3 = 3$ より $n = 1$ のときも $a_n = n^2 - n + 3$ は成立。

よって、 $a_n = n^2 - n + 3$

問題 2 5 (A) 数列 教科書

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n$

(2) $a_1 = 4, a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$

【問題 2 5 (1) の解説】

今回は、問題 2 6 以降の補題のような問題です。まず、(1) 番からです。 $a_{n+1} = 3a_n$ というのは、 a_{n+1} のひとつ小さな項を 3 倍したらひとつ大きな項である a_{n+1} になるっていうことだよな。

ということは、 a_n は公比が 3 の等比数列です。

【問題 2 5 (1) の解答】

数列 $\{a_n\}$ は初項 3、公比 3 の等比数列より、一般項 a_n は $a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$

【問題 2 5 (2) の解説】

この問題なんだけど、もし仮に $a_n - 3 = b_n$ とおくと $b_{n+1} = a_{n+1} - 3$ となるよね。

*このことが分からないという人がたまにいます。でも、難しく考えなくていいですよ。 b_n を b_{n+1} にするには b_n の n の部分を $n+1$ に置き換えたら、 b_{n+1} になります。ですから、 $b_n = a_n - 3$ のとき、 $b_{n+1} = a_{n+1} - 3$ です。

ということは、与えられた式の $a_{n+1} - 3 = 2(a_n - 3)$ は、 $b_{n+1} = 2b_n$ とすることができます。これは (1) と同じように考えれば、 b_n は公比が 2 の等比数列だっていうことが分かります。

【問題 2 5 (2) の解答】

$a_n - 3 = b_n$ とする。 $b_1 = a_1 - 3 = 4 - 3 = 1$ ◀ 数列 b_n の初項が必要になるから、初項を求めておいた

よって、数列 $\{b_n\}$ は初項が 1、公比が 2 の等比数列より $b_n = 1 \cdot 2^{n-1}$ となる。

$a_n - 3 = 2^{n-1}$ つまり $a_n = 2^{n-1} + 3$

*最初だから $a_n - 3 = b_n$ と置き換えたけど、このくらいだったら置き換えずに解いた方がラクです。慣れてきたら、下の置き換えずに解く方法でやっていきましょう。

【問題 25 (2) の別解】

数列 $\{a_n - 3\}$ は、初項 $a_1 - 3 = 4 - 3 = 1$ 、公比 2 の等比数列である。

$$a_n - 3 = 1 \cdot 2^{n-1}$$

$$a_n = 2^{n-1} + 3$$

問題 26 (A) 数列 教科書

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n - 2$

(2) $a_1 = 1, 2a_{n+1} = a_n - 2$

【問題 26 (1) の解説】

* $a_{n+1} = Aa_n + B$ 型

$a_{n+1} = 3a_n - 2 \cdots \textcircled{1}$ で、このままだったら解くことができないんだけど、もし仮に $\textcircled{1}$ の部分が問題 25 の (2) と同じように、 $a_{n+1} - \alpha = \beta(a_n - \alpha) \cdots \textcircled{2}$ だったら漸化式を解くことができるよね。

だって、これだったら数列 $\{a_n - \alpha\}$ は、公比が β の等比数列だと解いていけばいいんですから。

そこで、 α と β を求める必要があります。 $\textcircled{2}$ を展開して整理すると、 $a_{n+1} = \beta a_n - \alpha\beta + \alpha$ となります。これが $\textcircled{1}$ と一致することより、係数比較をすると $3 = \beta, -2 = -\alpha\beta + \alpha$ です。

これより、 $\alpha = 1, \beta = 3$ であることが分かります。 $\alpha = 1, \beta = 3$ を $\textcircled{2}$ に代入すると、 $a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$ となります。

このタイプの漸化式は、こうしたら解いていけるんだけど、ちょっとメンドウだよ。また、はじめてだから $a_{n+1} - \alpha = \beta(a_n - \alpha) \cdots \textcircled{2}$ とおいたけど、これって $\beta = 3$ であることはわざわざ書かなくても、 $a_{n+1} = 3a_n - 2 \cdots \textcircled{1}$ との係数比較を頭の中ですることにより $\beta = 3$ であることはすぐに分かります。

あとは、 α の求め方なんだけど、実はこれには簡単に求められてしまう方法があります。

α の求め方

$a_{n+1} = Aa_n + B$ は $a_{n+1} - \alpha = A(a_n - \alpha)$ と変形できます。このときの α は $\alpha = A\alpha + B$ をみます。ちなみに $\alpha = A\alpha + B$ のことを特性方程式といいます。

なぜ、上記で α を求めることができるかを説明しておきます。

特性方程式で α を求められる理由

$$a_{n+1} = Aa_n + B$$

-) $\alpha = A\alpha + B$ ← 特性方程式そのものですよ

$a_{n+1} - \alpha = Aa_n - A\alpha = A(a_n - \alpha)$ ← これで、確認ができた！

それでは、* $a_{n+1} = Aa_n + B$ 型の解法についてまとめておきます。

$a_{n+1} = Aa_n + B$ 型の解法

$a_{n+1} = Aa_n + B \cdots \textcircled{1}$ は特性方程式 $\alpha = A\alpha + B$ で α を求める。

$\textcircled{1}$ は $a_{n+1} - \alpha = A(a_n - \alpha)$ と変形できる。

【問題 26 (1) の解答】

$$a_{n+1} = 3a_n - 2 \cdots \textcircled{1}$$

特性方程式より

$$\alpha = 3\alpha - 2$$

$$\alpha = 1$$

よって、 $\textcircled{1}$ は $a_{n+1} - 1 = 3(a_n - 1)$ と変形できる。

数列 $\{a_n - 1\}$ は初項 $a_1 - 1 = 2 - 1 = 1$ 、公比 3 の等比数列より、

$$a_n - 1 = 1 \cdot 3^{n-1} \quad \therefore a_n = 3^{n-1} + 1$$

【問題 26 (2) の解説】

この問題だけど、これは $a_{n+1} = Aa_n + B$ の形になっていないよね。 a_{n+1} の係数が 1 ではない！ まずは、与えられた漸化式の両辺を 2 で割って、 a_{n+1} の係数を 1 にします。これで、 $a_{n+1} = Aa_n + B$ 形になってくれます。ここからは、(1) とまったく同じように解くことができます。

【問題 26 (2) の解答】

$$2a_{n+1} = a_n - 2$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n - 1 \cdots \textcircled{1} \quad \leftarrow \text{両辺を 2 で割って、} a_{n+1} = Aa_n + B \text{ の形にした}$$

特性方程式より $\alpha = \frac{1}{2}\alpha - 1$ これを解くと $\alpha = -2$

よって、 $\textcircled{1}$ は $a_{n+1} - (-2) = \frac{1}{2} \{a_n - (-2)\}$ つまり $a_{n+1} + 2 = \frac{1}{2}(a_n + 2)$ と変形できる。

数列 $\{a_n + 2\}$ は初項 $a_1 + 2 = 1 + 2 = 3$ 、公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列より、

$$a_n + 2 = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2$$

問題 27 (A) 数列 教科書

$a_1 = 4, a_{n+1} = 6a_n + 2^{n+2}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

【問題 27 の解説】

* $a_{n+1} = Aa_n + B \cdot C^n$ 型

今回の問題には 2 通りの解き方があります。漸化式には、問題によって複数の解き方があるものもあります。「どうせ解けたら OK でしょ」なんて 1 通りの解き方しか覚えられない人がいます。

ただ、漸化式の問題は誘導でこういうふうに分けてと指示されることが少なくありません。そんなとき、自分の知っている解法と、違った方の解き方なら困ってしまいます。大変だと思いますが、それほどパターンもある訳ではないので、ぜひともすべての解法を覚えておいてください。

今回の問題は、 $a_{n+1} = 6a_n + 2^{n+2}$ です。 $a_n = Aa_n + B \cdot C^n$ 型とちょっと違う。と思うかもしれませんが、指数法則で計算すると $a_{n+1} = 6a_n + 4 \cdot 2^n$ と変形できます。ですから、これも $a_{n+1} = Aa_n + B \cdot C^n$ 型です。

$a_{n+1} = Aa_n + B \cdot C^n$ 型の解法

【解法その 1】

$a_{n+1} = Aa_n + B \cdot C^n$ の両辺を C^{n+1} で割る。 $b_n = \frac{a_n}{C^n}$ と表すと、 $a_{n+1} = Aa_n + B$ 型になる (問題によっては $a_{n+1} - a_n = (\text{一定})$ の等差数列の形になることもあります)。

【解法その 2】

$a_{n+1} = Aa_n + B \cdot C^n$ の両辺を A^{n+1} で割る。 $b_n = \frac{a_n}{A^n}$ と表すと、階差数列を利用できる。

それでは、両方の解き方で解いていきます。

【解法その1の解答】

$$a_{n+1} = 6a_n + 2^{n+2}$$

$$a_{n+1} = 6a_n + 4 \cdot 2^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{6a_n}{2^{n+1}} + \frac{4 \cdot 2^n}{2^{n+1}} \quad \blacktriangleleft \text{両辺を } 2^{n+1} \text{ で割った}$$

*ここからの計算ですが、 2^{n+1} は $2 \cdot 2^n$ と変形できます。よって、 $\frac{6a_n}{2^{n+1}} = \frac{6a_n}{2 \cdot 2^n} = \frac{3a_n}{2^n} = 3 \cdot \frac{a_n}{2^n}$ です。また、 $\frac{4 \cdot 2^n}{2^{n+1}} = \frac{4 \cdot 2^n}{2 \cdot 2^n} = 2$ です。

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = 3 \cdot \frac{a_n}{2^n} + 2$$

ここで、 $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおく。 $b_1 = \frac{a_1}{2^1} = \frac{4}{2} = 2$ となる。

$$b_{n+1} = 3b_n + 2 \cdots \textcircled{1} \quad \blacktriangleleft a_{n+1} = Aa_n + B \text{ 型}$$

*これ以降は、 $a_{n+1} = Aa_n + B$ 型で、特性方程式を使って解いていく漸化式です。

特性方程式より、 $\alpha = 3\alpha + 2$ より $\alpha = -1$

これより、 $\textcircled{1}$ は $b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$ と変形できる。

数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 2 + 1 = 3$ 、公比 3 の等比数列より、

$b_n + 1 = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$ よって、 $b_n = 3^n - 1$ となる。

$$b_n = \frac{a_n}{2^n} \text{ より}$$

$$\frac{a_n}{2^n} = 3^n - 1 \quad \blacktriangleleft b_n = \frac{a_n}{2^n} \text{ に } a_n = \frac{a_n}{2^n} \text{ を代入した!}$$

$$\begin{aligned} a_n &= 2^n(3^n - 1) \quad \blacktriangleleft \text{両辺に } 2^n \text{ をかけた!} \\ &= 6^n - 2^n \end{aligned}$$

↑ $2^n \cdot 3^n = (2 \cdot 3)^n = 6^n$ です。単なる指数法則 $(ab)^2 = a^2b^2$ を使っただけです。指数法則は自由に使いこなせるようになっておいてください。

【解法その2の解答】

$$a_{n+1} = 6a_n + 2^{n+2}$$

$$a_{n+1} = 6a_n + 4 \cdot 2^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{6^{n+1}} = \frac{6a_n}{6^{n+1}} + \frac{4 \cdot 2^n}{6^{n+1}} \quad \leftarrow \text{両辺を } 6^{n+1} \text{ で割った}$$

*ここからの計算ですが、 6^{n+1} は $6 \cdot 6^n$ と変形できます。よって、 $\frac{6a_n}{6^{n+1}} = \frac{6a_n}{6 \cdot 6^n} = \frac{a_n}{6^n}$

また、 $\frac{4 \cdot 2^n}{6^{n+1}} = \frac{4 \cdot 2^n}{6 \cdot 6^n} = \frac{4}{6} \left(\frac{2}{6}\right)^n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ です。

$$\frac{a_{n+1}}{6^{n+1}} = \frac{a_n}{6^n} + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ここで、 $b_n = \frac{a_n}{6^n}$ とおく。 $b_1 = \frac{a_1}{6^1} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ となる。

$$b_{n+1} = b_n + \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \leftarrow \text{階差数列の形になった!}$$

$n \geq 2$ のとき

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^k \quad \leftarrow \text{階差の公式より}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}}{1 - \frac{1}{3}} \quad \leftarrow \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^k \text{ は初項 } \frac{1}{3} \text{ 公比 } \frac{1}{3} \text{ の初項から第 } n-1 \text{ 項までの和より}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}}{\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right\}$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

これは、 $n = 1$ のときも成立する。よって、 $n \geq 1$ のとき、 $b_n = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$ となる。

↑階差数列のときは $n = 1$ のときも成立してくれる。ただし、この部分をしっかりと答案に書いておかないと減点されますよ。

$$b_n = \frac{a_n}{6^n} \text{ より、} \frac{a_n}{6^n} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\text{よって } a_n = 6^n - 2^n$$

問題 28 (A) 数列 教科書

$a_1 = \frac{1}{2}, a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

【問題 28 の解説】

* $a_{n+1} = \frac{Aa_n}{Ba_n + C}$ 型

このときは、両辺の逆数をとるとうまくいきます。ただ、分母に 0 がくるとまずいので逆数をとるときに、0 でないということを説明しておく必要があります。

$a_{n+1} = \frac{Aa_n}{Ba_n + C}$ 型の解法

両辺の逆数をとることによって、 $b_n = \frac{1}{a_n}$ で表せます。後は、 $a_{n+1} = Aa_n + B$ 型になってくれます。

【問題 28 の解答】

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2a_n + 3} \cdots \textcircled{1}$$

* まずは $a_n \neq 0$ であることを示します

$a_{n+1} = 0$ と仮定する。このとき、 $\textcircled{1}$ より、 $a_n = 0$ となる。

これを繰り返すと、 $a_n = a_{n-1} = \cdots = a_1 = 0$ となる。これは、 $a_1 = \frac{1}{2}$ に反する。よって、すべての自然数 n において $a_n \neq 0$ である。

* $a_n \neq 0$ であることを示せたので、ここから両辺の逆数をとって解いていきます。

$a_n \neq 0, a_{n+1} \neq 0$ より、 $\textcircled{1}$ の両辺の逆数をとる

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n + 3}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2a_n}{a_n} + \frac{3}{a_n}$$

$$\frac{1}{a_{n+1}} = 2 + \frac{3}{a_n}$$

ここで、 $\frac{1}{a_n} = b_n$ とする。

$$b_{n+1} = 3b_n + 2 \cdots \textcircled{2} \text{ となる。また、} b_1 = \frac{1}{a_1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

*大丈夫だと思うけど、念のために話しておきます。 $\frac{1}{\frac{1}{2}}$ は $1 \div \frac{1}{2}$ なんてやる方法もあるけど、分数の中に分数が含まれているとき、分母分子にてきとうな数をかけて分数の中の分数を消去するという方向で考えていくのがラクです。

$$\text{今回の場合 } \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \times \frac{2}{2} = \frac{2}{1} = 2 \text{ としました。}$$

特性方程式より $\alpha = 3\alpha + 2$ より $\alpha = -1$

よって、 $\textcircled{2}$ は $b_{n+1} + 1 = 3(b_n + 1)$ と変形できる。

数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 3$ 、公比 3 の等比数列より $b_n + 1 = 3 \cdot 3^{n-1}$ となる。よって、 $b_n = 3^n - 1$

$$b_n = \frac{1}{a_n} \text{ より、} a_n = \frac{1}{b_n} = \frac{1}{3^n - 1}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{3^n - 1}$$

問題 29 (B) 数列 教科書

$a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + n - 1$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

【問題 29 の解説 (その 1)】

* $a_{n+1} = Aa_n + Bn + C$ 型

この問題も問題 27 と同じく 2 通りの解法があります。まずひとつめは $a_{n+1} - a_n$ を求めてから解く方法。そして、もうひとつめは $a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = A(a_n + \alpha n + \beta)$ とおいて解いていくものです。

個人的には、後者の解き方がおすすめなのですが、教科書では前者のやり方のみが載っているということが多いです。両方とも解法で解けるようになっておいてください。

$a_{n+1} = Aa_n + Bn + C$ 型の解法 その 1

$$a_{n+1} = Aa_n + Bn + C \cdots \textcircled{1}$$

① で n を $n+1$ で置き換える $a_{n+2} = Aa_{n+1} + B(n+1) + C \cdots \textcircled{2}$

② - ① より

$$a_{n+2} = Aa_{n+1} + B(n+1) + C$$

$$\text{-) } a_{n+1} = Aa_n + Bn + C$$

$$a_{n+2} - a_{n+1} = A(a_{n+1} - a_n) + B$$

ここで $b_n = a_{n+1} - a_n$ とすると、 $a_{n+2} - a_{n+1} = A(a_{n+1} - a_n) + B$ は $b_{n+1} = Ab_n + B$ となります。

b_n を求めてから a_n を求めていきます。

【問題 29 の解答 (その 1)】

$a_{n+1} = 2a_n + n - 1 \cdots \textcircled{1}$ とする。① より、 $a_{n+2} = 2a_{n+1} + n \cdots \textcircled{2}$ とする。

② - ① より、

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) + 1 \text{ となる。}$$

ここで、 $b_n = a_{n+1} - a_n$ とする。 $b_{n+1} = 2b_n + 1$ となる。

また、①に $n = 1$ を代入すると $a_2 = 2a_1 + 1 - 1 = 2 \cdot 1 + 1 - 1 = 2$ となる。 $b_1 = a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$ となる。

↑数列 $\{b_n\}$ の初項を求めた

まずは数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めます。

$$b_1 = 1, b_{n+1} = 2b_n + 1 \cdots \textcircled{3}$$

特性方程式より $\alpha = 2\alpha + 1$ よって $\alpha = -1$

これより ③は $b_{n+1} + 1 = 2(b_n + 1)$ と変形できる。

数列 $\{b_n + 1\}$ は初項 $b_1 + 1 = 1 + 1 = 2$ 、公比 2 の等比数列より、 $b_n + 1 = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ 。
よって $b_n = 2^n - 1$ となる。

$$a_{n+1} - a_n = b_n \text{ より } a_{n+1} - a_n = 2^n - 1$$

$n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (2^k - 1) \quad \leftarrow \text{階差数列の公式より} \\ &= 1 + \frac{2(2^{n-1} - 1)}{2 - 1} - (n - 1) \\ &= 1 + 2(2^{n-1} - 1) - n + 1 \\ &= 2^n - n \end{aligned}$$

$a_n = 2^n - n$ は $n = 1$ のときも成立する。よって、 $a_n = 2^n - n$

【問題 29 の解説 (その 2)】

それでは、次の解法に進みます。

$a_{n+1} = Aa_n + Bn + C$ 型の解法 その2

$$a_{n+1} = Aa_n + Bn + C \cdots \textcircled{1}$$

①が $a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = A(a_n + \alpha n + \beta) \cdots \textcircled{2}$ のように変形できるとします。

①と②の係数を比較して α, β を求めます。

ここからは②の式より、数列 $\{a_n + \alpha n + \beta\}$ は、初項 $a_1 + \alpha + \beta$ 、公比 A の等比数列と解いていくだけです。

【注】

上記の②の $a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = A(a_n + \alpha n + \beta) \cdots$ がなかなか覚えられません。という人がいます。確かに覚えにくいですよ。

漸化式の式変形のポイントとしては、左辺を $n+1$ の式に右辺を n の式にすることです（もちろんいろいろなパターンがあるので一概には言えませんよ。でも、典型的なパターンとしては、左辺を $n+1$ の式に、右辺を n の式にします）。

これまでの問題の漸化式を思い出して欲しいんだけど、特性方程式を使って $a_{n+1} - \alpha = A(a_n - \alpha)$ なんて変形したよね。

これもよく見ると左辺が $n+1$ の式、右辺が n の式です。で、今回も同様に左辺を $n+1$ 、右辺を n の式にしたいです。

このあたりのことを意識すれば覚えられると思います。

【余談です。興味のない人はスルーしてください】

上記の説明でかえってわかりにくくなったという人ごめんなさいね。うまく説明できていなかったかもしれません。

この問題に限った訳ではないんですけど、分からなかったらとりあえず覚えてもらえばいいですよ。

「えっ、覚えるなんて難しい」と思う人もいると思います。でも、暗記って繰り返しやったら、誰でも覚えてしまいます。例えば、あなたが電車通学だったとします。全然意識しなくても、停車する駅の名前なんか覚えてしまうよね？それと同じ、人間ってテキスト

ウに接しているつもりでも、同じ情報に接していたら、暗記してしまうものなんです。

1回でできないと嘆いてないで、できるようになるまで何度もやってください。「覚えるまで、何回でもするぞ！」なんて決意すると意外にはやくできるようになっています。

P S

さらに余談が続きます。よく「暗記数学なんて意味がない…」なんて言う人がいます。その気持ちよく分かります。

でも、僕は自慢じゃないけど、暗記数学でした。あまり頭がよくなかったので、理解しながら進めるなんて無理でした。最初は、がんばろうとしていたのですが、途中で「オレには、無理」ということで。解き方を暗記していきました。

暗記してある程度、問題が解けるようになってから、参考書を見直してみると、「ああ、こういうことを言っているのか」ということを理解することができるようになりました。

あなたが、ひとつずつ理解して進めていけるようなら、別にいいですよ。でも、ちっとも分からないのに、『数学は理解することが重要なんだ』なんて言い張って前に進めないようなら、暗記でどんどん進めてもらったらいいですよ。

心配しなくても大丈夫です。必ずできるようになります。今、解いてもらっているテキストの問題が解けるようになっていて（暗記数学でも、ひとつずつ理解でもどっちでもいいですよ）できるようにならなかった人は一人もいません。全員例外なくできるようになっています。

結局、アプローチの仕方は自由なんですよね。問題が自分一人だけの力で解けるようになればそれでOKです。自信をもってやってください。

長すぎる余談でした。ごめんなさいね。それでは、引き続き頑張ってください。

【問題29の解答（その2）】

$a_{n+1} = 2a_n + n - 1 \cdots \textcircled{1}$ とする。

α, β を定数として $a_{n+1} + \alpha(n+1) + \beta = 2(a_n + \alpha n + \beta) \cdots \textcircled{2}$ とする。

②を変形すると $a_{n+1} = 2a_n + \alpha n + \beta - \alpha$ となる。これと①を比較して

$\alpha = 1, \beta - \alpha = -1$ となる。よって $\alpha = 1, \beta = 0$

②は $a_{n+1} + (n+1) = 2(a_n + n)$ となる。

数列 $\{a_n + n\}$ は初項 $a_1 + 1 = 2$ 、公比2の等比数列より

$a_n + n = 2 \cdot 2^{n-1}$ となる。よって、 $a_n = 2^n - n$

問題 30 (A) 数列 教科書

数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。 $S_n = n^2 + 4n$ であるとき、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

【問題 30 の解説】

*漸化式に S_n が含まれているとき

S_n が含まれているときは、

① $S_1 = a_1$

② $n \geq 2$ のとき $a_n = S_n - S_{n-1}$ が成立

上記 2 式を使って解いていきます。このことに関しては、問題 8 で解説しています。それを参考にして、覚えていってください。

【問題 30 の解答】

$$S_n = n^2 + 4n$$

$$a_1 = S_1 = 1^2 + 4 \cdot 1 = 5$$

$n \geq 2$ のとき、

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

$$= n^2 + 4n - \{(n-1)^2 + 4(n-1)\}$$

$$= n^2 + 4n - n^2 + 2n - 1 - 4n + 4$$

$$= 2n + 3$$

これは、 $n = 1$ のときも成立する。

↑ $a_n = 2n + 3$ に $n = 1$ を代入すると、 $a_1 = 2 \cdot 1 + 3 = 5$ より、 $n = 1$ のときも $a_n = 2n + 3$ は成立

よって、 $a_n = 2n + 3$

問題 3 1 (B) 数列 教科書

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1) $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$

(2) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n = 0$

(3) $a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0$

【問題 3 1 の解説】

* $a_{n+2} + Aa_{n+1} + Ba_n = 0$ 型

$a_{n+2} + Aa_{n+1} + Ba_n = 0$ のタイプの漸化式は隣接 3 項間の漸化式と呼ばれています。難しく感じる人も多いけど、覚えてしまえばワンパターンで解けてしまいますよ。解き方を覚えておいてくださいね。

隣接 3 項間の漸化式の解法

$$a_{n+2} + Ba_{n+1} + Ca_n = 0 \cdots \textcircled{1}$$

特性方程式 $x^2 + Bx + C = 0$ の 2 解が α, β のとき

① は

$$a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta (a_{n+1} - \alpha a_n) \cdots \textcircled{2}$$

$$a_{n+2} - \beta a_{n+1} = \alpha (a_{n+1} - \beta a_n) \cdots \textcircled{3}$$

の 2 通りに変形できる。

以下、② より、数列 $\{a_{n+1} - \alpha a_n\}$ は公比 β の等比数列

③ より、数列 $\{a_{n+1} - \beta a_n\}$ は公比 α の等比数列

として解いていきます。

特性方程式が重解のとき、その重解を α とすると ① は $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \alpha (a_{n+1} - \alpha a_n)$ と変形できます。

【注】

上記の式変形がなぜ成立したのか話しておきます。ただ、知らなくてもこの隣接3項間の漸化式は解けてしまうので、興味がないという人は無視してもらって大丈夫です。

特性方程式 $x^2 + Bx + C = 0$ の2解が α, β です。解と係数の関係により $\alpha + \beta = -B, \alpha\beta = C$ です。

先ほどの式、②, ③ ともに変形して整理すると $a_{n+2} - (\alpha + \beta)a_{n+1} + \alpha\beta a_n = 0$ です。で、この式に、解と係数の関係で求めた式 $\alpha + \beta = -B, \alpha\beta = C$ 代入すると $a_{n+2} + Ba_{n+1} + Ca_n = 0$ となってくれます。

このことより、上記の式変形が成立するというを確認することができました。では、問題に戻ります。

この隣接3項間の漸化式は、

- ① 特性方程式が異なる2つの実数解（しかもともに解が1でない）をもつとき、
- ② 特性方程式が異なる2つの実数解をもちそのうちの一方が1のとき、
- ③ 特性方程式が重解をもつとき、

の3つの場合に問題を分けているということがあります。

問題を解きながら話していきますが、重解をもつときの解き方は重解をもつときにしかできないと思い込んでいる人もいますが、そんなことはありません。他の場合でも、解くことができます。それでは、問題に進みます。

【問題31(1)の解説】

この問題の特性方程式は $x^2 - 5x + 6 = 0$ で、この方程式の解は2と3です。この場合、 $a_{n+1} - \alpha a_n$ と $a_{n+1} - \beta a_n$ の両方を求めて解いていくのが一番ラクな解法です。

問題を解くときに話しますが、この問題でもどちらか一方だけでも求めたらそこから求めることができます（ちょっとだけ面倒くさくなると思います）。それでは、解答に進みます。

【問題 3 1 (1) の解答】

$$a_1 = 1, a_2 = 5, a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0 \cdots \textcircled{1}$$

特性方程式 $x^2 - 5x + 6 = 0$ の解は $x = 2, 3$

よって、 $\textcircled{1}$ は $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 2a_n) \cdots \textcircled{2}$ と $a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 2a_n) \cdots \textcircled{3}$ と変形できる

*上記の $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ を作る式変形はもう丸暗記しておかないとダメなんだけど、不安になった場合実際に展開してみたら、合っていると確認することができますよ。

$\textcircled{2}$ より、数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = 5 - 2 \cdot 1 = 3$ 、公比 3 の等比数列より $a_{n+1} - 2a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n \cdots \textcircled{2}'$

$\textcircled{3}$ より、数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は初項 $a_2 - 3a_1 = 5 - 3 \cdot 1 = 2$ 、公比 2 の等比数列より $a_{n+1} - 3a_n = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n \cdots \textcircled{3}'$

*ここからは $\textcircled{2}' - \textcircled{3}'$ をすることで、 a_{n+1} が消えて a_n を求めることができます！

$\textcircled{2}' - \textcircled{3}'$ より

$$\begin{array}{r} a_{n+1} - 2a_n = 3^n \\ -) a_{n+1} - 3a_n = 2^n \\ \hline a_n = 3^n - 2^n \end{array}$$

以上より、 $a_n = 3^n - 2^n$

*以上で求めることができました。この問題ですけど、 $\textcircled{2}'$ または $\textcircled{3}'$ のどちらか一方からでも求めることができます。移行すると、 $a_{n+1} = Aa_n + B \cdot C^n$ 型になってくれます。特性方程式が重解のときには、この方法で解くしかありません。

それでは、別解として、この方法で解いてみます。今回は、 $\textcircled{2}'$ の方でやってみるね。別に、 $\textcircled{3}'$ を使ってもいいですよ。どちらでも大差ありません。

【問題3 1 (1) の別解 (途中から)】

②' より、

$$a_{n+1} - 2a_n = 3 \cdot 3^{n-1} = 3^n$$

$$a_{n+1} = 2a_n + 3^n$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{1}{3} \quad \leftarrow \text{両辺を } 3^{n+1} \text{ で割って整理した。}$$

$$\text{ここで、} b_n = \frac{a_n}{3^n} \text{ とする。} b_1 = \frac{a_1}{3} = \frac{1}{3}$$

$$b_{n+1} = \frac{2}{3} b_n + \frac{1}{3} \cdots \text{②''}$$

$$\text{特性方程式 } \alpha = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3} \text{ より、} \alpha = 1$$

よって、②'' は $b_{n+1} - 1 = \frac{2}{3}(b_n - 1)$ と変形できる。

数列 $\{b_n - 1\}$ は初項 $b_1 - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列より

$$b_n - 1 = -\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = -\left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ となる。}$$

$$b_n = \frac{a_n}{3^n} \text{ より、} \frac{a_n}{3^n} = -\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1$$

$$\text{よって、} a_n = 3^n - 2^n$$

*このように、隣接3項間の漸化式は、重解でなくてもどちらかひとつのみの式で解くことができます。ただ、一方だけ求める方がやや面倒なので、重解でないときはひとつめの解き方で解いていくことが多いですよ。

【問題3 1 (2) の解説】

(2) の問題も特性方程式を解くと、 $x^2 + 3x - 4 = 0$ の解は $x = 1, 4$ です。このときも(1)と同じように解いていってもらってもいいんですけど、特性方程式の解が1のとき

は、次の解答のように解くことが多いです。

多くの教科書では、 $a_{n+1} - a_n$ を求めて解いていくことが多いですが、違う方でやっても良かった方が計算がラクだと思いますよ。どちらでも解けます。両方で解いておくとね。

【問題3 1 (2) の解答】

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n = 0 \cdots \textcircled{1}$$

特性方程式より $x^2 + 3x - 4 = 0$ これを解くと $x = 1, -4$

これより、 $\textcircled{1}$ は $a_{n+2} - a_{n+1} = -4(a_{n+1} - a_n)$ と変形できる。

数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ は初項 $a_2 - a_1 = 2 - 1 = 1$ 、公比 -4 の等比数列より

$$a_{n+1} - a_n = (-4)^{n-1}$$

↑ここからは単なる階差数列です。

$n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} (-4)^{k-1} \\ &= 1 + \frac{1 - (-4)^{n-1}}{1 - (-4)} \\ &= \frac{6 - (-4)^{n-1}}{5} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{6 - (-4)^{n-1}}{5} \text{ は } n = 1 \text{ のときも成立する。よって、} a_n = \frac{6 - (-4)^{n-1}}{5}$$

【問題3 1 (2) の別解】

* $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - a_n)$ で、 $\alpha = -4, \beta = 1$ としてできる $a_{n+2} + 4a_{n+1} = a_{n+1} + 4a_n$ を使って解いていきます。

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} + 3a_{n+1} - 4a_n = 0 \cdots \textcircled{1}$$

特性方程式より $x^2 + 3x - 4 = 0$ これを解くと $x = 1, -4$

これより、 $\textcircled{1}$ は $a_{n+2} + 4a_{n+1} = a_{n+1} + 4a_n$ と変形できる。

数列 $\{a_{n+1} + 4a_n\}$ は定数数列であり、 $a_{n+1} + 4a_n = a_n + 4a_{n-1} = \dots = a_2 + 4a_1 = 2 + 4 \cdot 1 = 6$ である。

*上記が分からないという人がいます。よく分からない人は、 $b_n = a_{n+1} + 4a_n$ とおいてください。そうすると、 $b_{n+1} = a_{n+2} + 4a_{n+1}$ です。 $a_{n+2} + 4a_{n+1} = a_{n+1} + 4a_n$ は、 $b_{n+1} = b_n$ となるので、定数数列になります。

定数数列は各項の値がすべて等しいので、 $b_n = b_1$ で、ここから $a_{n+1} + 4a_n = a_2 + a_1 = 6$ になります。

$a_{n+1} + 4a_n = 6$ より、 $a_{n+1} = -4a_n + 6 \dots \textcircled{1}$ ◀ これは一番簡単な $a_{n+1} = Aa_n + B$ 型の漸化式

特性方程式より $\alpha = -4\alpha + 6$ よって $\alpha = \frac{6}{5}$

これより $\textcircled{1}$ は $a_{n+1} - \frac{6}{5} = -4\left(a_n - \frac{6}{5}\right)$ と変形できる。

数列 $\left\{a_n - \frac{6}{5}\right\}$ は初項 $a_1 - \frac{6}{5} = 1 - \frac{6}{5} = \frac{1}{5}$ 、公比 -4 の等比数列より

$$a_n - \frac{6}{5} = \frac{1}{5} \cdot (-4)^{n-1}$$

$$a_n = \frac{6 - (-4)^{n-1}}{5}$$

*どちらの方法でも当然答えは同じになります。ひとつめの解き方だと階差数列が出てきます。一方、ふたつめの解き方だと、定数数列が出てきてくれるとそのあとの漸化式も一番簡単なパターンのもので、今回の問題は2つめの解きの方がおすすめです。

【問題 3 1 (3) の解答】

*これは、特性方程式の解が重解になるものです。このときは、(1) のふたつ目の解法で解いていくしかありません。

$$a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = 0 \dots \textcircled{1}$$

特性方程式より $x^2 - 6x + 9 = 0$ この解は $x = 3$ となる。

よって、①は $a_{n+2} - 3a_{n+1} = 3(a_{n+1} - 3a_n)$ と変形できる

数列 $\{a_{n+1} - 3a_n\}$ は初項 $a_2 - 3a_1 = 5 - 3 \cdot 1 = 2$ 、公比 3 の等比数列より $a_{n+1} - 3a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ となる。

$$a_{n+1} = 3a_n + 2 \cdot 3^{n-1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} + \frac{2}{9} \quad \leftarrow \text{両辺を } 3^{n+1} \text{ で割って整理した}$$

ここで $b_n = \frac{a_n}{3^n}$ とする。

$$b_{n+1} = b_n + \frac{2}{9}$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{2}{9}$$

数列 b_n は初項 $b_1 = \frac{a_1}{3^1} = \frac{1}{3}$ 、公差 $\frac{2}{9}$ の等差数列より、

$$b_n = \frac{1}{3} + (n-1) \cdot \frac{2}{9} = \frac{2n+1}{9}$$

$$b_n = \frac{a_n}{3^n} \text{ より}$$

$$\frac{a_n}{3^n} = \frac{2n+1}{9}$$

$$a_n = 3^{n-2}(2n+1)$$

問題 3 2 (B) 数列

$a_1 = 1, b_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + b_n, b_{n+1} = a_n + 2b_n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ がある。このとき、数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

【問題 3 2 の解説】

*連立漸化式 その 1

連立漸化式と呼ばれるものです。この問題は誘導付きで出題されることが多いです。今回の問題もそうですが、誘導がない場合 2 式を足したり引いたりしたらうまくいくことが多いです（これでうまくいかない場合は次の問題 3 3 で解説します）。

$$a_{n+1} = 2a_n + b_n \cdots \textcircled{1}, \quad b_{n+1} = a_n + 2b_n \cdots \textcircled{2} \text{ とします。}$$

何も条件が与えられていないので、とりあえず $\textcircled{1} + \textcircled{2}, \textcircled{1} - \textcircled{2}$ をしてみます。

*どこから $\textcircled{1} + \textcircled{2}, \textcircled{1} - \textcircled{2}$ が出てきたの？なんて思う人もいます。

まあ、これは知っているから出てきただけで、別に数学的な根拠がある訳ではありません。

ただ、この問題に限った話ではなくどの単元でも、似ている 2 式が与えられているとき 2 式を足したり、引いたりするとうまくいくことが多いです。

このことは、意外に重要です。覚えておいてくださいね。

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ より

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + b_n + a_n + 2b_n = 3(a_n + b_n)$$

↑ 数列 $\{a_n + b_n\}$ は等比数列これで、解ける形になってくれている。

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より

$$a_{n+1} - b_{n+1} = 2a_n + b_n - a_n - 2b_n = a_n - b_n$$

↑ 数列 $\{a_n - b_n\}$ は定数数列。解ける形になってくれている。

【問題 3 2 の解答】

① + ② より

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + b_n + a_n + 2b_n = 3(a_n + b_n)$$

数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 1 + 3 = 4$ 、公比 3 の等比数列より、 $a_n + b_n = 4 \cdot 3^{n-1} \dots$ ①'

① - ② より

$$a_{n+1} + b_{n+1} = 2a_n + b_n - a_n - 2b_n = a_n - b_n$$

数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 - b_1 = 1 - 3 = -2$ の定数数列より、 $a_n - b_n = -2 \dots$ ②'

①' + ②' より

$$\begin{array}{r} a_n + b_n = 4 \cdot 3^{n-1} \\ +) a_n - b_n = -2 \\ \hline 2a_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2 \\ \therefore a_n = 2 \cdot 3^{n-1} - 1 \end{array}$$

①' - ②' より

$$\begin{array}{r} a_n + b_n = 4 \cdot 3^{n-1} \\ +) a_n - b_n = -2 \\ \hline 2b_n = 4 \cdot 3^{n-1} + 2 \\ \therefore b_n = 2 \cdot 3^{n-1} + 1 \end{array}$$

問題 3 3 (C) 数列

$a_1 = 1, b_1 = 3, a_{n+1} = 3a_n + b_n, b_{n+1} = 2a_n + 4b_n$ で定められる数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ がある。このとき、数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

【問題 3 3 の解説】

*連立漸化式 その2

問題 3 2 に引き続いて連立漸化式の問題です。問題 3 2 と同じように ① + ② や ① - ② をしてみてもうまくいきません。

こういった連立漸化式の場合、誘導がついていることが多いです。ですが、誘導なしでも出題されることがある（特に数学 III）ので、解き方を覚えて解けるようになっておいてください。

この連立漸化式には 2 通りの解法があります。まず、ひとつめは連立方程式のように解く方法です。どういうことかという、今回与えられた式には、ひとつの式の中に a_n や b_n が混ざっています。これを連立方程式を解くように、どちらかを消去して a_{n+1} と a_n のみ、または b_{n+1} と b_n のみの式にして解いていきます。

消去した後は、隣接 3 項間の漸化式になります。

そして、もうひとつの解法は強引に $a_{n+1} + \alpha b_{n+1} = \beta(a_n + \alpha b_n)$ をみたす α, β を求めて、ここから数列 $\{a_n + \alpha b_n\}$ は公比 β の等比数列より \dots と解いていきます。

【問題 3 3 の解答（その 1）】

*連立方程式のように片方を消去して解いていきます。

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \cdots \text{①} \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n \cdots \text{②} \end{cases} \quad \text{とする。}$$

$$\text{① より、} b_n = a_{n+1} - 3a_n \cdots \text{①}'$$

また、 $b_{n+1} = a_{n+2} - 3a_{n+1} \cdots \text{①}''$ ◀ ①' で n を $n+1$ で置き換えた

①', ①'' を ② に代入すると

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} = 2a_n + 4(a_{n+1} - 3a_n)$$

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 10a_n = 0 \cdots \textcircled{3}$$

*ここからは単純な隣接3項間の漸化式です。

特性方程式より $x^2 - 7x + 10 = 0$ を解くと $(x-2)(x-5) = 0$ より

③ は $a_{n+2} - 2a_{n+1} = 5(a_{n+1} - 2a_n)$ と変形できる。

数列 $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = (3a_1 + b_1) - 2a_1 \leftarrow \textcircled{1}$ より $a_2 = 3a_1 + b_1$ が成立 $= a_1 + b_1 = 4$ 、公比5の等比数列より

$$a_{n+1} - 2a_n = 4 \cdot 5^{n-1} \cdots \textcircled{4}$$

また、③ は $a_{n+2} - 5a_{n+1} = 2(a_{n+1} - 5a_n)$ と変形できる。

数列 $\{a_{n+1} - 5a_n\}$ は初項 $a_2 - 5a_1 = (3a_1 + b_1) - 5a_1 = -2a_1 + b_1 = -2 \cdot 1 + 3 = 1$ 、公比2の等比数列より、 $a_{n+1} - 5a_n = 2^{n-1} \cdots \textcircled{5}$

④ - ⑤ より

$$a_{n+1} - 2a_n - (a_{n+1} - 5a_n) = 4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}$$

$$3a_n = 4 \cdot 5^{n-1} - 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{4}{3} \cdot 5^{n-1} - \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{6} \text{ で } n \text{ を } n+1 \text{ で置き換えると } a_{n+1} = \frac{4}{3} \cdot 5^{(n+1)-1} - \frac{1}{3} \cdot 2^{(n+1)-1} = \frac{20}{3} \cdot 5^{n-1} - \frac{2}{3} \cdot 2^{n-1} \cdots \textcircled{6}'$$

⑥, ⑥' を ①' に代入すると

$$b_n = \frac{20}{3} \cdot 5^{n-1} - \frac{2}{3} \cdot 2^{n-1} - 3 \left(\frac{4}{3} \cdot 5^{n-1} - \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} \right) = \frac{8}{3} \cdot 5^{n-1} + \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}$$

以上より $a_n = \frac{4}{3} \cdot 5^{n-1} - \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}$, $b_n = \frac{8}{3} \cdot 5^{n-1} + \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}$ となる。

【問題 3 3 の解説 (その 2)】

*強引に $a_{n+1} + \beta b_{n+1} = \alpha(a_n + \beta b_n)$ とする解法

この解法の場合、ほとんどの場合問題で設問という形で以下のような誘導がつけます。

「 $a_{n+1} + \beta b_{n+1} = \alpha(a_n + \beta b_n)$ をみたま α, β を求めよ」という誘導がつけます。ただ、誘導がなかったとしても、この解き方で解いていってもらって大丈夫です。

もし、 $a_{n+1} + \beta b_{n+1} = \alpha(a_n + \beta b_n)$ というふうになったとしたら数列 $\{a_n + \beta b_n\}$ は公比が α の等比数列として解いていくことができます。

【問題 3 3 の解答 (その 2)】

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + b_n \cdots \textcircled{1} \\ b_{n+1} = 2a_n + 4b_n \cdots \textcircled{2} \end{cases} \quad \text{とする。}$$

α, β を定数として $a_{n+1} + \beta b_{n+1} = \alpha(a_n + \beta b_n) = \alpha a_n + \alpha \beta b_n \cdots \textcircled{3}$ をみたま α, β を求める。

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \beta b_{n+1} &= 3a_n + b_n + \beta(2a_n + 4b_n) \quad (\because \textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ を代入した}) \\ &= (3 + 2\beta)a_n + (1 + 4\beta)b_n \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

③, ④ の右辺同士は等しいので、

$$3 + 2\beta = \alpha \cdots \textcircled{5}, \quad 1 + 4\beta = \alpha\beta \cdots \textcircled{6} \text{ が成立する。}$$

↑ a_n と b_n の係数を比較した!

$$\textcircled{5}, \textcircled{6} \text{ を解くと } (\alpha, \beta) = \left(2, -\frac{1}{2}\right), (5, 1) \text{ となる。}$$

$(\alpha, \beta) = \left(2, -\frac{1}{2}\right)$ のとき、③ に $\alpha = 2, \beta = -\frac{1}{2}$ を代入すると、 $a_{n+1} - \frac{1}{2}b_n = 2\left(a_n - \frac{1}{2}b_n\right)$ となる。

これより、数列 $\left\{a_n - \frac{1}{2}b_n\right\}$ は初項 $a_1 - \frac{1}{2}b_1 = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$ 、公比 2 の等比数列より、

$$a_n - \frac{1}{2}b_n = -\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} \dots \textcircled{7} \text{ となる。}$$

$(\alpha, \beta) = (5, 1)$ のとき、 $\textcircled{3}$ に $\alpha = 5, \beta = 1$ を代入すると、 $a_{n+1} + b_n = 5 \cdot (a_n + b_n)$ となる。

これより、数列 $\{a_n + b_n\}$ は初項 $a_1 + b_1 = 1 + 3 = 4$ 、公比 5 の等比数列より、 $a_n + b_n = 4 \cdot 5^{n-1} \dots \textcircled{8}$ となる。

$\textcircled{7} - \textcircled{8}$ より

$$\begin{aligned} a_n - \frac{1}{2}b_n - (a_n + b_n) &= -\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} - 4 \cdot 5^{n-1} \\ -\frac{3}{2}b_n &= -\frac{1}{2} \cdot 2^{n-1} - 4 \cdot 5^{n-1} \\ b_n &= \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} + \frac{8}{3} \cdot 5^{n-1} \dots \textcircled{9} \end{aligned}$$

$\textcircled{9}$ を $\textcircled{8}$ に代入すると

$$\begin{aligned} a_n + \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} + \frac{8}{3} \cdot 5^{n-1} &= 4 \cdot 5^{n-1} \\ a_n &= 4 \cdot 5^{n-1} - \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} - \frac{8}{3} \cdot 5^{n-1} \\ &= \frac{4}{3} \cdot 5^{n-1} - \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\text{以上より } a_n = \frac{4}{3} \cdot 5^{n-1} - \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}, \quad b_n = \frac{8}{3} \cdot 5^{n-1} + \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}$$

問題 3 4 (B) 数列

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$(1) a_1 = 1, (n+2)a_{n+1} = na_n$$

$$(2) a_1 = 5, a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n+3}a_n$$

$$(3) a_1 = 1, (n+3)a_{n+1} = 2na_n$$

【問題 3 4 の解説】

*真ん中をかける漸化式

このタイプの問題は、知らない人も多くて初見では難しいと思います。でも、覚えてしまえば簡単です。真ん中のものを両辺にかけるだけで、できてしまいます。

【問題 3 4 (1) の解説】

問題は、 $(n+2)a_{n+1} = na_n$ です。この場合、 $n+2$ と n の真ん中の $n+1$ を両辺にかけたらうまくいきます。こんなの知らなかったら絶対にできないので、覚えておいてくださいいね。

$(n+2)a_{n+1} = na_n$ の両辺に $n+1$ をかけると、 $(n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+1)na_n$ になります。これで、「ああ、解ける形になったな」と思って欲しいんだけど、よく分からない人は $b_n = (n+1)na_n$ とでもおいてみてください。

そうすると $b_{n+1} = (n+2)(n+1)a_{n+1}$ となるので左辺と一致します。このことより、 $(n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+1)na_n$ は $b_{n+1} = b_n$ となるので数列 $\{b_n\}$ は定数数列です。当然、 $b_n = b_1$ として解いていきます。

*意外に簡単だったよね。この真ん中をかけるタイプの問題は、難しそうだけであっさり解けてしまいます。解法を覚えておいてくださいいね。

【問題 3 4 (1) の解答】

$(n+2)a_{n+1} = na_n$ の両辺に $(n+1)$ をかける。

$$(n+2)(n+1)a_{n+1} = (n+1)na_n$$

数列 $\{(n+1)na_n\}$ は定数数列。よって、 $(n+1)na_n = (1+1) \cdot 1 \cdot a_1 = 2$

$$\therefore a_n = \frac{2}{n(n+1)}$$

【問題 3 4 (2) の解説】

$a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n+3}a_n$ を式変形します。まず、最初の式変形は、とりあえず両辺に $2n+3$ をかけます。

分数を消去したいから両辺に $2n+3$ をかけたのではありません。

漸化式の問題は、左辺を $n+1$ の式に、右辺を n の式にするということが多いです。ですから、大きい方が左辺に来ます。今回の場合 $\frac{2n-1}{2n+3}$ ですが、大きい分母が左辺にくるように両辺に $2n+3$ をかけました。

ちなみに、もし仮に $a_n = \frac{2n+3}{2n-1}a_n$ と分母分子が逆になった形であったとします。このときも、左辺の方を大きい式にしたいので両辺を $2n+3$ で割って、 $\frac{a_n}{2n+3} = \frac{a_n}{2n-1}$ と考えていきます。

漸化式独特な考え方なので、しっかりと覚えておいてくださいね。

では、両辺に $2n+3$ をかけてところまで戻ります。元の式の両辺に $2n+3$ をかけると $(2n+3)a_{n+1} = (2n-1)a_n$ になるよね。

ここからは、真ん中をかけます。 $2n+3$ と $2n-1$ の真ん中の $2n+1$ を両辺にかけます。

$(2n+3)(2n+1)a_{n+1} = (2n+1)(2n-1)a_n$ です。これで、 $b_n = (2n+1)(2n-1)a_n$ とすると、 $b_{n+1} = b_n$ となり、(1) 同様、数列 $\{b_n\}$ は定数数列です。

【問題34(2)の解答】

$$a_{n+1} = \frac{2n-1}{2n+3} a_n$$

$$(2n+3)a_{n+1} = (2n-1)a_n$$

$$(2n+3)(2n+1)a_{n+1} = (2n+1)(2n-1)a_n \quad \leftarrow \text{両辺に } (2n+1) \text{ をかけた}$$

数列 $\{(2n+1)(2n-1)a_n\}$ は定数数列。

$$(2n+1)(2n-1)a_n = (2 \cdot 1 + 1)(2 \cdot 1 - 1) \cdot 5 = 15$$

$$\text{よって、} a_n = \frac{15}{(2n+1)(2n-1)}$$

【問題34(3)の解説】

今回の問題は、少し珍しいです。ですけど、「ああ、こんなパターンもあるんだな」と思って聞いてください。

今回の問題は、 $(n+3)a_{n+1} = 2na_n$ です。 $n+3$ と n の真ん中の $n + \frac{3}{2}$ をかけるのかな？なんて思う人もいるかもしれませんが、これではうまくいきません。

n の部分は整数ですので、漸化式で分数がきたらうまくいきません。

結論から言えば、今回の問題は両辺に $(n+1)(n+2)$ をかけます。 n と $n+3$ の間が $n+1$ と $n+2$ なので、 $(n+1)(n+2)$ を両方にかかけました。

* 「こんなの思いつかないよ」なんて思った人は、解法を覚えてくださいね。この問題に限った話ではないですが、数学って「こんな解法もあるんだ」ということをどんどん頭の中にストックしていってください。

そうしてはじめて思考力の必要な難しい問題にもとりかかることができるようになってきます。

数学には、考えるために道具が必要なんですね。大変だと思いますけど、今自分は道具

を手に入れている状態なんだな、と割り切ってどんどんと頭の中に解法をためていってください。

【問題34(3)の解答】

$(n+3)a_{n+1} = 2na_n$ の両辺に $(n+2)(n+1)$ をかける。

$(n+3)(n+2)(n+1)a_{n+1} = 2(n+2)(n+1)na_n$ となる。ここで、 $b_n = (n+2)(n+1)na_n$ とおくと、 $b_{n+1} = 2b_n$ となる。

$b_1 = (1+2) \cdot (1+1) \cdot 1 \cdot a_1 = 6$ より、数列 $\{b_n\}$ は初項6、公比2の等比数列となる。

$$b_n = 6 \cdot 2^{n-1} = 3 \cdot 2^n$$

$(n+2)(n+1)na_n = 3 \cdot 2^n$ より、 $a_n = \frac{3 \cdot 2^n}{n(n+1)(n+2)}$ となる。

問題 3 5 (B) 数列

$a_1 = 4, a_{n+1} = 8a_n^2$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

【問題 3 5 の解説】

*指数が含まれているタイプの漸化式

今回は、 $a_{n+1} = 8a_n^2$ と指数が含まれています。他にもルートが含まれているとき（ルートは指数になおすと $\frac{1}{2}$ 乗です）など、こういったタイプの漸化式は両辺の対数をとって解いていきます。

$A = B$ の a を底として両辺の対数をとると $\log_a A = \log_a B$ になります。ただ、この真数は正という条件があるので、対数をとるときは両辺とも正ということを示しておかないといけません。

【問題 3 5 の解答】

$a_1 = 4$ また、 $a_{n+1} = 8a_n^2$ より、すべての自然数 n に対して $a_n > 0$ となる。

*厳密な答案としては、数学的帰納法を使って示さないといけません。ただ、式の形から $a_n > 0$ となるのは明らかだよ。ちなみに、答案ではあまり「あきらか」とは書かない方がいいです。どこまでが、「あきらかなんだ」と突っ込まれます。

漸化式の問題で両辺の対数を取るとき、こういうふうに簡単に示しておくだけで十分です。気になる人は、しっかりと帰納法で示してもらったらよいと思います。

$$a_{n+1} = 8a_n^2$$

↑すべての自然数 n で $a_n > 0$ ということは示しました。ということは当然 a_{n+1} も正です。左辺と右辺が等号でつながっているので、当然両辺とも正ですよ。

たまに、右辺が 2 乗だから、右辺は正ではなく 0 以上では? なんて思う人がいるので、書いておきました。

両辺の 2 を底とする対数をとる。

↑底は何でとってもできますが、今回の場合 2 でとります。 $8 = 2^3$ と表せますし、また底は小さい数の方が考えやすいので、底は 2 や 3 でとることが多いです。もちろん数学 3

では、自然対数の e でとることも多いですし、また常用対数で底を 10 ととることもあります。

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8a_n^2$$

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8 + \log_2 a_n^2$$

$$\log_2 a_{n+1} = 3 + 2\log_2 a_n$$

ここで、 $\log_2 a_n = b_n$ とする。

$$b_{n+1} = 3 + 2b_n \cdots \textcircled{1}$$

特性方程式より $\alpha = 3 + 2\alpha$ よって、 $\alpha = -3$

① は $b_{n+1} + 3 = 2(b_n + 3)$ と変形できる。

数列 $\{b_n + 3\}$ は初項 $b_1 + 3 = \log_2 a_1 + 3 = \log_2 4 + 3 = 2 + 3 = 5$ 、公比 2 の等比数列より

$$b_n + 3 = 5 \cdot 2^{n-1}$$

$$b_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 3$$

$$\log_2 a_n = 5 \cdot 2^{n-1} - 3$$

$$\therefore a_n = 2^{5 \cdot 2^{n-1} - 3}$$

問題 3 6 (D) 数列

$a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{3a_n + 4}$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

【問題 3 6 の解説】

* $a_{n+1} = \frac{Ca_n + D}{Aa_n + B}$ 型

問題 2 8 で、 $a_{n+1} = \frac{Aa_n}{Ba_n + C}$ を話しました。分子が Aa_n なら簡単なのですが、今回のように分子が $Ca_n + D$ の形になった漸化式はかなり大変です。

こういった形の漸化式は、誘導なしで出題されることはあまりないと思います。ですが、誘導なしでも解けてしまいます。誘導なしで、解く方法を解説していきます。ただ、この問題は、かなり難問ですので、難関大学を目指す人以外は無視してもらっても大丈夫だと思います。

と言っても、解き方さえ覚えてしまえば比較的簡単ですよ。難しいと言いましたが、あまり難しくありません (← どっちやねん)。

言いたいこととしては、今回のタイプの問題が出題されるのは難関大学に限られます。ですから、難関大学を目指している受験生はしっかりと勉強をしておいてください。学校の試験対策などで、このプリントをしている人は省略してもらって構いませんよ。それでは、解説に進みます。

まず、 $a_{n+1} = \frac{Ca_n + D}{Aa_n + B} \dots \textcircled{1}$ にも特性方程式があります。

このときの特性方程式は $x = \frac{Cx + D}{Ax + B}$ です。この方程式の解を α, β とします。

α, β が求めれば、 $\textcircled{1}$ の両辺から α, β を引きます。

↑ 「なんでこうなるの？」より、これはこうすることは暗記するしかないですよ。

では、実際に今回の問題を解説を交えながら解いていきます。

【問題 3 6 の解説つきの解答】

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{3a_n + 4} \dots \textcircled{1}$$

特性方程式より $x = \frac{2x+1}{3x+4}$ これを解くと、 $x = -1, \frac{1}{3}$

① の両辺から -1 を引く

$$a_{n+1} - (-1) = \frac{2a_n + 1}{3a_n + 4} - (-1)$$

$$a_{n+1} + 1 = \frac{5(a_n + 1)}{3a_n + 4} \dots \textcircled{2} \quad \leftarrow \text{右辺は通分をして整理した}$$

*特性方程式の 2 解のうち、 $x = -1$ を引いたので次は、もうひとつの方の $x = \frac{1}{3}$ を引き
ます。

① の両辺から $\frac{1}{3}$ を引く

$$a_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{2a_n + 1}{3a_n + 4} - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3a_n - 1}{3(3a_n + 4)} \quad \leftarrow \text{右辺は通分をして整理した}$$

$$= \frac{a_n - \frac{1}{3}}{3a_n + 4} \dots \textcircled{3}$$

*で、ここからは ③ ÷ ② をします。これもなぜそうするか? と聞かれても、こうすると
うまくいくしかとしか答えようがありません。とりあえず、解法をすべて暗記してくだ
さい。

② で割るのですが、0 で割ることはできません。② が 0 になることはない(つまり $a_n \neq -1$)
ということを示しておきます。

$a_1 = 1 > 0$ また $a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{3a_n + 4}$ の形より、すべての自然数 n で $a_n > 0$ となる。よって、
 $a_n + 1 \neq 0$ ◀ $a_n > 0$ のとき、当然 $a_n + 1 \neq 0$ は成立!

*「何をしてんの？」と思う人もいます。少し、説明します。

今回は $a_n \neq -1$ を示したいんだけど、もし仮に $a_n > 0$ がいえたら、当然 $a_n \neq -1$ を示したことになるよね。

$a_{n+1} = \frac{2a_n + 1}{3a_n + 4}$ の右辺がすべてプラスだけであらわされています。 $a_n > 0$ のとき、当然 $a_{n+1} > 0$ より、帰納的に $a_n > 0$ がいえます。本当だったら、丁寧に帰納法で示した方がいいのですが、漸化式のときはこういった簡単な書き方をすることが多いです。

なんで $a_n \neq -1$ を示すのに、 $a_n > 0$ を示したの？と思う人もいます。単純に、 $a_n > 0$ は示しやすい。そして、結果的に $a_n > 0$ を示せば、 $a_n \neq -1$ も示したことになる。これが理由です。

*ここから、③ ÷ ② をします。ちなみに別に ② ÷ ③ でもいいですよ。ただ、これをするとき ③ が 0 でないということを示さないとダメです。これを示すのは、② が 0 でないということを示すよりも少しだけ大変そうだったから、使わなかっただけです。

②, ③ より

$$\frac{a_{n+1} - \frac{1}{3}}{a_{n+1} + 1} = \frac{\frac{a_n - \frac{1}{3}}{3a_n + 4}}{\frac{5(a_n + 1)}{3a_n + 4}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{a_n - \frac{1}{3}}{a_n + 1}$$

*上記の式 $\frac{a_{n+1} - \frac{1}{3}}{a_{n+1} + 1} = \frac{1}{5} \cdot \frac{a_n - \frac{1}{3}}{a_n + 1}$ より、数列 $\left\{ \frac{a_n - \frac{1}{3}}{a_n + 1} \right\}$ は等比数列です。

数列 $\left\{ \frac{a_n - \frac{1}{3}}{a_n + 1} \right\}$ は初項 $\frac{a_1 - \frac{1}{3}}{a_1 + 1} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + 1} = \frac{1}{3}$ 、公比 $\frac{1}{5}$ の等比数列である。

$$\frac{a_n - \frac{1}{3}}{a_n + 1} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$$

*後は、上記の式を a_n について解けば、 a_n が求まります。

$$\begin{aligned}\frac{a_n - \frac{1}{3}}{a_n + 1} &= \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 5^{n-1}}\end{aligned}$$

$$3 \cdot 5^{n-1} \left(a_n - \frac{1}{3}\right) = a_n + 1$$

$$3 \cdot 5^{n-1} a_n - 5^{n-1} = a_n + 1$$

$$(3 \cdot 5^{n-1} - 1)a_n = 5^{n-1} + 1$$

$$a_n = \frac{5^{n-1} + 1}{3 \cdot 5^{n-1} - 1}$$

*「ホントに長かった・・・」でも、難関大学を狙う人は重要な問題なので、解答の流れを全部覚えておいてくださいね。

問題 37 (D) 数列

数列 $\{a_n\}$ を、 $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{4a_n + 1}{2a_n + 3}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 2つの実数 α と β に対して、 $b_n = \frac{a_n + \beta}{a_n + \alpha}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。数列 $\{b_n\}$ が等比数列となるような α と β ($\alpha > \beta$) を 1組求めよ。
 (2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。

(東北大学)

【問題 37 の解説】

* $a_{n+1} = \frac{Ca_n + D}{Aa_n + B}$ 型の誘導ありの問題

2008年の東北大学理学部後期日程の過去問です。この分数型の漸化式がでてくるときは、こういうふうに出題されることが多いです。過去、千葉大学でもまったく同じような問題を見たことがあります。難関大学理系では、出題されることがあります。これも、少し変わった解き方をするので、しっかりと解き方を覚えておいてください。

【問題 37 (1) の解説】

まず、数列 $\{b_n\}$ が等比数列であると書かれています。数列 $\{b_n\}$ が等比数列であるとき、 $b_{n+1} = rb_n$ の形で表されます。これを使うには、 b_{n+1} を変形していかないといけないので、 b_{n+1} を作ってから変形していきます。

$b_n = \frac{a_n + \beta}{a_n + \alpha}$ と与えられています。当然 $b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + \beta}{a_{n+1} + \alpha}$ です。

$$\begin{aligned}
 b_{n+1} &= \frac{a_{n+1} + \beta}{a_{n+1} + \alpha} \\
 &= \frac{\frac{4a_n + 1}{2a_n + 3} + \beta}{\frac{4a_n + 1}{2a_n + 3} + \alpha} \quad \leftarrow a_{n+1} = \frac{4a_n + 1}{2a_n + 3} \text{ より}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{n+1} &= \frac{4a_n + 1 + \beta(2a_n + 3)}{4a_n + 1 + \alpha(2a_n + 3)} \quad \leftarrow \text{分母分子に } 2a_n + 3 \text{ をかけて整理した} \\
&= \frac{(2\beta + 4)a_n + 3\beta + 1}{(2\alpha + 4)a_n + 3\alpha + 1} \\
&= \frac{2\beta + 4}{2\alpha + 4} \cdot \frac{a_n + \frac{3\beta + 1}{2\beta + 4}}{a_n + \frac{3\alpha + 1}{2\alpha + 4}}
\end{aligned}$$

最後の、 $\frac{2\beta + 4}{2\alpha + 4} \cdot \frac{a_n + \frac{3\beta + 1}{2\beta + 4}}{a_n + \frac{3\alpha + 1}{2\alpha + 4}}$ の式変形がなんのためにしたの?なんて思う人もいます。

確かにこの式変形意味不明だよね。そこで、なぜこの式変形をしたのか解説していきます。

今回は、数列 b_n が等比数列であることを示したいわけです。 b_n が等比数列のとき、 $b_{n+1} = r b_n$ の形で表されます。

今回、 $b_{n+1} = \frac{2\beta + 4}{2\alpha + 4} \cdot \frac{a_n + \frac{3\beta + 1}{2\beta + 4}}{a_n + \frac{3\alpha + 1}{2\alpha + 4}}$ となった訳ですが、 $\frac{2\beta + 4}{2\alpha + 4}$ は一定です。この部分を r とおくと、 $b_{n+1} = r \cdot \frac{a_n + \frac{3\beta + 1}{2\beta + 4}}{a_n + \frac{3\alpha + 1}{2\alpha + 4}}$ で表されたことになります。

繰り返しになりますが、数列 $\{b_n\}$ が等比数列で表されるとき $b_{n+1} = r b_n$ で表されます。

ということは、 $b_{n+1} = r \cdot \frac{a_n + \frac{3\beta + 1}{2\beta + 4}}{a_n + \frac{3\alpha + 1}{2\alpha + 4}}$ の青字で書いた部分が b_n と一致しているとき、 $b_{n+1} = r b_n$ の形で表されたことになり、 b_n が等比数列という条件を使ったことになりません。

$$b_n = \frac{a_n + \frac{3\beta + 1}{2\beta + 4}}{a_n + \frac{3\alpha + 1}{2\alpha + 4}}$$

となったら、いいんだけど b_n は問題文で書かれているとおり、

$$b_n = \frac{a_n + \beta}{a_n + \alpha}$$

です。

ということは $\frac{a_n + \beta}{a_n + \alpha} = \frac{a_n + \frac{3\beta + 1}{2\beta + 4}}{a_n + \frac{3\alpha + 1}{2\alpha + 4}}$ が成立します。これより $\alpha = \frac{3\alpha + 1}{2\alpha + 4}, \beta = \frac{3\beta + 1}{2\beta + 4}$ が成立します。これで、 α, β の値を求めることができます。

ちょっと難しいけど、このタイプの問題はこういうふうに解いていきます。覚えておいてくださいね。

【問題 3 7 (1) の解答】

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} + \alpha}{a_{n+1} + \beta}$$

$$= \frac{\frac{4a_n + 1}{2a_n + 3} + \beta}{\frac{4a_n + 1}{2a_n + 3} + \alpha} \quad \leftarrow a_{n+1} = \frac{4a_n + 1}{2a_n + 3} \text{ より}$$

$$= \frac{4a_n + 1 + \beta(2a_n + 3)}{4a_n + 1 + \alpha(2a_n + 3)} \quad \leftarrow \text{分母分子に } 2a_n + 3 \text{ をかけて整理した}$$

$$= \frac{(2\beta + 4)a_n + 3\beta + 1}{(2\alpha + 4)a_n + 3\alpha + 1}$$

$4 + 2\alpha \neq 0, 4 + 2\beta \neq 0$ として $\leftarrow 0$ で割ることはできない

$$b_{n+1} = \frac{2\beta + 4}{2\alpha + 4} \cdot \frac{a_n + \frac{3\beta + 1}{2\beta + 4}}{a_n + \frac{3\alpha + 1}{2\alpha + 4}}$$

数列 $\{b_n\}$ が等比数列であるとき、 $\frac{3\alpha + 1}{2\alpha + 4} = \alpha, \frac{3\beta + 1}{2\beta + 4} = \beta$ が成立する。

方程式を解くと $\alpha = -1, \frac{1}{2}, \beta = -1, \frac{1}{2}$ となる。 $\alpha > \beta$ より、 $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = -1$ である。

【問題37(2)の解答】

*この問題は(1)がメインで、(1)ができれば後は道なりに素直に解いていくだけです。

$$b_{n+1} = \frac{2\beta+4}{2\alpha+4} \cdot \frac{a_n + \frac{3\beta+1}{2\beta+4}}{a_n + \frac{3\alpha+1}{2\alpha+4}} \text{ に } \alpha = \frac{1}{2}, \beta = -1 \text{ を入れて整理すると、}$$
$$b_{n+1} = \frac{2}{5} \cdot \frac{a_n - 1}{a_n + \frac{1}{2}} = \frac{2}{5} b_n \text{ となる。}$$

数列 $\{b_n\}$ は、初項 $b_1 = \frac{a_1 - 1}{a_1 + \frac{1}{2}} = \frac{2-1}{2+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$ 、公比 $\frac{2}{5}$ の等比数列となる。

$$b_n = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = \left(\frac{2}{5}\right)^n \text{ となる。}$$

$$b_n = \frac{a_n - 1}{a_n + \frac{1}{2}} \text{ より、}$$

$$\frac{a_n - 1}{a_n + \frac{1}{2}} = \frac{2^n}{5^n}$$

$$5^n(a_n - 1) = 2^n(a_n + \frac{1}{2})$$

$$5^n a_n - 5^n = 2^n a_n + 2^{n-1}$$

$$(5^n - 2^n)a_n = 5^n + 2^{n-1}$$

$$a_n = \frac{5^n + 2^{n-1}}{5^n - 2^n}$$

問題 38 (A) 数列 教科書

すべての自然数 n に対して、等式 $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \dots$ ① が成立することを数学的帰納法を用いて示せ。

【問題 38 の解説】

数学的帰納法の簡単な問題です。このプリントは数学 III のプリントです。ですから、とりあえず帰納法は理解できているという前提で進めます。

まず、 $n = 1$ のとき、① が成立することを示さないといけないのですが、これは簡単なので解説は省略します。

次に $n = k$ のとき ① が成立すると仮定して、 $n = k + 1$ のときも ① が成立するということを示していけないといけません。

このときは、 $n = k$ のときの式 $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ を使って、 $n = k + 1$ のときの等式 $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\} \dots$ ② という式を示します。

帰納法以外の等式の証明のときは、示したい式の ② の左辺または右辺または両方を変形して等式を示していくことが多かったよね。

でも、等式の帰納法の場合、使って良い式 ($n = k$ のときに成立する式) の $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ と証明する式 ② の形がにっています。

もし、仮に $n = k$ のときの式を変形 (同値変形) して、② の式になったとしたら ② の式を示したことになるよね。

だって成立している式を、同値変形した式も当然成立しているよね。だから、これで示したことになります。等式の帰納法の証明はほとんどの場合、こういうふうにして示すことができます。

【問題 38 の解答】

$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \dots$ ① を数学的帰納法で示す。

(i) $n = 1$ のとき

(左辺) $= 1^2 = 1$, (右辺) $= \frac{1}{6}(1+1)(2+1) = 1$ より、① は成立

(ii) $n = k$ (k は自然数) のとき、① が成立すると仮定する。

*示したい式は $1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}$ です。

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

$$\Leftrightarrow 1^2 + 2^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$$

↑ 両辺に $(k+1)^2$ を加えた。両辺に同じ数を加えても、当然同値性は崩れない

$$= \frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1) + 6(k+1)\}$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2 + 7k + 6)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\{(k+1)+1\}\{2(k+1)+1\}$$

↑ $n = k+1$ のときの、示したい式と一致した！

よって、 $n = k+1$ のときも ① は成立する。

以上より、すべての自然数 n で ① が成立する。(証明終)

問題 39 (A) 数列 教科書

すべての自然数 n に対して、不等式 $2^n > n$ が成立することを数学的帰納法を用いて示せ。

【問題 39 の解説】

この問題は、不等式の帰納法です。不等式の帰納法はほとんどの問題で以下の知識を使って解いていきます。

不等式の解法

$A > B$ であることを示したいが、直接 $A > B$ を示すことはできない。

今、 $A > C$ が分かっている、このとき $C > B$ がいれば、 $A > C$ かつ $C > B$ より $A > B$ が言えたことになる。

上記が成立するという事は少し考えればあきらかだと思うけど、不等式の帰納法の場合、上記を使うことが多いです。なんとなく理解している人も多いと思います。しっかりと理解しておいてください。それでは、答案に進みます。

【問題 39 の解答】

すべての自然数 n に対して、「 $2^n > n \dots$ ①」が成立することを数学的帰納法で示す。

(i) $n = 1$ のとき

(①の左辺) = $2^1 = 2$, (①の右辺) = 1 よって ① は成立

(ii) $n = k$ (k は自然数) のとき ① が成立すると仮定する。

*示したい式 $2^{k+1} > k+1$

$$2^k > k$$

$$\Leftrightarrow 2^{k+1} > 2k \dots \textcircled{2}$$

↑両辺を2倍しても同値性はくずれない。示したい式 $2^{k+1} > k+1$ の左辺だけでも一致させた

*ここでもし仮に $2k > k+1 \dots \textcircled{3}$ が言えたとしたら、 $\textcircled{2}$ かつ $\textcircled{3}$ より、示したい式の $2^{k+1} > k+1$ を示したことになります。

ここで、 $2k - (k+1) = k-1 \geq 0$ ($\because k$ は自然数)

$$\text{よって、} 2k \geq k+1 \dots \textcircled{3}$$

* $A > B$ かつ $B \geq C$ のとき、 $A > C$ となり等号は含まれません。等号が成立するのは、 $A = B$ かつ $B = C$ のときです。今回は、 $A > B$ より $A = B$ となることはありません。

だから、 $A > B$ かつ $B \geq C$ のとき、 $A > C$ です。

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ より $2^{k+1} > k+1$ が成立する。よって、 $n = k+1$ のときも、 $\textcircled{1}$ は成立する。

以上より、すべての自然数 n において $\textcircled{1}$ は成立する。(証明終)

*今回の問題は、非常に簡単な問題で拍子抜けしたかもしれません。ですが、不等式の帰納法の問題の流れは今回の問題とまったく同じという問題がほとんどです。帰納法は、数学IIIでもよく出題されます。理解が曖昧だ、という人はしっかりと理解しておいてください。

これで、数列の復習が終わりました。ここから、極限に戻ります。長かったよね。お疲れ様です。漸化式はこれだけで十分です。何度もやってしっかりと解法を覚えておいてください。

問題 40 (A) 教科書

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ は既知であるとする。次の極限值を求めよ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$ の極限值を求めよ。 (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$

【問題 40 の解説】

まず、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ って突然出てきて e って何？なんて思う人もいると思います。

e って、今の段階ではとりあえず「 $e \approx 2.71$ の無理数」ぐらいの理解でいいと思いますよ。

完全な余談です。読まなくて大丈夫です。

e の説明、少しテキトウな話し方でごめんなさいね。でも、今の段階ではすべてを理解する必要はありません。よく、「細かいことが気になる性格なんです」といって、前に進めない人がいます。

細かいことが気になるのは悪いことではないと思います。でも、そういう人は細かい部分に時間をとられ過ぎて、よく出てくるところが理解できていないなんてことがよくあります。それでは、本末転倒ですよ。

完全に話がそれてしまいますが、2割8割の法則って知っています？簡単に言うと、「上位2割が重要な8割をしめる」ということです。やっていることのうち2割が、結果の8割に影響する、なんていうことです。

数学もこれにあてはまります。細かい部分に集中するということは、「受験にあまり出てこない問題に多くの時間を費やす」ということです。これでは、大学に落ちてしまいます。

もちろん、勉強という面ではすべてを理解して、なおかつ自分で不思議と感じたところはとことん勉強をする、これが重要なのかもしれません。

でも、僕も含めて「普通の人はそのようなこと言ってもらえないよね。とにかく大学には合格したい」。すべての事柄を完璧に理解するなんて無理があります。本当にどうでもいい細かい枝葉の部分は後回しにして、まずは幹となる重要なところを理解することを優先していくべきです。

性格的にムリなんです…っていう気持ちも分かるけど、それじゃあ落ちてしまうよ。細かいことは省略して進めるようにしてください。

数学から話がそれでごめんなさいね。でも、細かすぎて勉強が進まないという人本当に多いんです。ホントにもったない。ただ、そうはいっても、あまりにテキトウに進みすぎではダメですよ。そういった人は、もう少し丁寧に進めていくようにしてください。あくまで、バランスが必要なんですよね。

では問題に進みます。

今回の「 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ 」ですが、これも(以前出てきた、 $a > 0$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ のように)問題に与えられているときもあるし、与えられていないこともあります。与えられていなくても、これは使ってもらって構いませんよ。これは、高校の範囲では、証明は不可能です。

で、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ なんだけど、 n 以外でも、 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $f(n) \rightarrow \infty$ がいえていて、 $f(n)$ がすべて整数値をとるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)} = e$ となってくれます。

$f(n)$ なんて使ったけど、たいがいは簡単なものです。例えば $f(n) = 2n$ です。 $n \rightarrow \infty$ のとき、 $2n \rightarrow \infty$ となるし、 $2n$ は $2, 4, 6, 8, \dots$ と整数値以外とらないよね。だから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} = e$ が成立します。

【注】

$f(n) = 2n$ のとき、 $2, 4, 6, \dots$ と $f(n)$ は整数値しかとらないので大丈夫です。

ただ、 $f(n) = \frac{1}{2}n$ のとき、 $n = 1, 2, 3, \dots$ を $f(n) = \frac{1}{2}n$ に代入すると $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$ とな

り、 $f(n)$ は整数値以外をとります。だから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{2}n}\right)^{\frac{1}{2}n} = e$ としてはいけません。

ただ、以下の話はこれから勉強をする「関数の極限」での話ですが、実数 x に対して、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ ということも成立します。

だから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{2}n}\right)^{\frac{1}{2}n} = e$ となります。

ただ、今回の問題で与えられている「 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ 」これは、 n が自然数のときにし

か成立しません。ですから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{2}n}\right)^{\frac{1}{2}n} = e$ としては、いけません。

少し細かすぎる話になりました。もし、分かんなかったら飛ばしてもらって大丈夫ですよ。それでは、解答に移ります。

【問題 40 (1) の解答】

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}^3 \quad \leftarrow \text{指数法則より、}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}^2 \text{ がいえる} \\ &= e^3 \end{aligned}$$

【問題 40 (2) の解答】

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= e^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

問題 4 1 (B or C)

数列 $\{a_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は漸化式

$$(n+3)a_{n+1} - (2n+4)a_n + (n+1)a_{n-1} = 0 \quad (n \geq 2)$$

を満たしている。次の問いに答えよ。

- (1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ とおく。 b_n を b_{n-1} ($n \geq 2$) で表せ。
- (2) b_n を n と b_1 を用いて表せ。
- (3) $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{1}{2}$ であるとき、 a_n を求めよ。
- (4) (3) で求めた a_n に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n$ を求めよ。

(関西大学)

【問題 4 1 (1) の解説】

誘導がついているタイプの問題です。こういった問題は、それほど難しく考えることなく誘導にのっていただけです。

$(n+3)a_{n+1} - (2n+4)a_n + (n+1)a_{n-1} = 0$ をとにかく誘導に従って式変形をしていきます。そのときに、ひとつだけでも強引に $a_{n+1} - a_n$ が出てくるような式変形を強引にしていけます。

*当たり前なんだけど、誘導がついている場合は誘導に従っていけば解けるようになってくれています。片方だけでも、強引にあわせていけば、残った部分もうまくいくようになってくれています。

今回の問題の場合 $b_n = a_{n+1} - a_n$ を使うために、 $(n+3)a_{n+1} - (2n+4)a_n + (n+1)a_{n-1} = 0$ を $(n+3)a_{n+1} - \{(n+3) + (n+1)\}a_n + (n+1)a_{n-1} = 0$ と変形します。

なぜ、こういうふうに変形したかと言えばとりあえず片方だけでも強引にあわせませう。

片方だけでも強引にあわせるっていうのは、どういうことかと言うと、今回 $(n+3)a_{n+1} - (2n+4)a_n$ が与えられています。ここから、 b_n を作ろうとしたら

$$\begin{aligned} & (n+3)a_{n+1} - (2n+4)a_n \\ = & (n+3)a_{n+1} - (n+3)a_n - (n+1)a_n \\ = & (n+3)(a_{n+1} - a_n) - (n+1)a_n \\ = & (n+3)b_n - (n+1)a_n \end{aligned}$$

こうすることで、とりあえず b_n が出てきてくれました。そうすると、残った部分を整理すると、 $(n+3)(a_{n+1} - a_n) - (n+1)(a_{n+1} - a_n) = 0$ となってくれてうまくいきます。

今の式変形のポイントは、左側の方で $b_n = a_{n+1} - a_n$ を作るためには、とりあえず a_{n+1}, a_n の係数を同じにしないといけない! という理由で変形していただけです。残った方の係数もたまたま $(n+1)$ どうしになってくれてうまくいく形になってくれるのですが、最初式変形をするときは、こっちは考えていません。

先ほども言いましたが、誘導は解けるように作ってくれています。片方だけでも、強引にあわせていけば残った部分もうまい具合にいくようになってくれます。 こういったタイプの問題は、こういうふうな強引な式変形がポイントです。

【問題 4 1 (1) の解答】

$$(n+3)a_{n+1} - (2n+4)a_n + (n+1)a_{n-1} = 0$$

$$(n+3)a_{n+1} - \{(n+3) + (n+1)\}a_n + (n+1)a_{n-1} = 0$$

$$(n+3)a_{n+1} - (n+3)a_n - (n+1)a_n + (n+1)a_{n-1} = 0$$

$$(n+3)(a_{n+1} - a_n) - (n+1)(a_n - a_{n-1}) = 0$$

$$(n+3)b_n - (n+1)b_{n-1} = 0$$

$$b_n = \frac{n+1}{n+3}b_{n-1}$$

【問題 4 1 (2) の解説】

まず、漸化式のポイントとしては、左辺を n の部分が大きいものができるようにして、右辺を n の部分が小さくなるように変形をするんだよね。今回もそれにしたがって、 $b_n = \frac{n+1}{n+3}b_{n-1}$ の両辺に $n+3$ をかけて $(n+3)b_n = (n+1)b_{n-1}$ とします。

で、とりあえず $(n+3)b_n = (n+1)b_{n-1}$ としたんだけど、ここからは問題 3 4 の漸化式の間

題のタイプで、「両辺にまんなかのものをかける」というやり方で解いていく問題です。今回の場合、両辺に $(n+2)$ をかけるとうまくいきます。それでは、問題に進みます。

【問題 4 1 (2) の解答】

$$b_n = \frac{n+1}{n+3} b_{n-1}$$

$$(n+3)b_n = (n+1)b_{n-1} \quad \blacktriangleleft \text{両辺に } n+3 \text{ をかけた}$$

$$(n+3)(n+2)b_n = (n+2)(n+1)b_{n-1} \cdots \textcircled{*} \quad \blacktriangleleft \text{両辺に真ん中の } n+2 \text{ をかけた}$$

数列 $\{(n+3)(n+2)b_n\}$ は定数数列であり、 $(n+3)(n+2)b_n = (2+2)(2+1)b_{(2-1)} = 12b_1$
 上記の $\textcircled{}$ は $n \geq 2$ で成立する式です。例えば、 $c_n = (n+3)(n+2)b_n$ とおくと、 $\textcircled{*}$ は、 $c_n = c_{n-1} (n \geq 2)$ です。この式より $c_n = c_{n-1} = c_{n-2} \cdots = c_2 = c_1$ となります。一番右側の $c_2 = c_1$ は、 $\textcircled{*}$ の式で $n=2$ のときです。

$$(n+3)(n+2)b_n = 12b_1 \text{ となる。よって、} b_n = \frac{12b_1}{(n+3)(n+2)}$$

【問題 4 1 (3) の解答】

*初項が与えられているので、すぐに b_n が求まります。 $a_{n+1} - a_n = b_n$ となるので、ここからは階差数列です。

$$b_n = a_{n+1} - a_n \text{ より、} b_1 = a_2 - a_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ となる。}$$

$$b_n = \frac{12b_1}{(n+3)(n+2)} = \frac{12 \cdot \frac{1}{6}}{(n+3)(n+2)} = \frac{2}{(n+3)(n+2)}$$

$$\text{よって、} b_n = \frac{2}{(n+3)(n+2)}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{(n+3)(n+2)}$$

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{(k+3)(k+2)} \quad \leftarrow \text{階差数列の公式より} \\ &= \frac{1}{3} + \sum_{k=1}^{n-1} 2 \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+3} \right) \quad \leftarrow \text{シグマの中身を部分分数分解をして互いに打ち消しあう形にした！} \\ &= \frac{1}{3} + 2 \left\{ \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) \right\} \\ &= \frac{1}{3} + 2 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+2} \right) \end{aligned}$$

*これを答えとしてはダメです。メンドウだけど、すべて通分をして整理したものが答えです。

$$\begin{aligned} &= \frac{n+2}{3(n+2)} + \frac{2(n+2)}{3(n+2)} - \frac{6}{3(n+2)} \\ &= \frac{3n}{3(n+2)} \\ &= \frac{n}{n+2} \end{aligned}$$

$n = 1$ のときも $a_n = \frac{n}{n+2}$ は成立する。よって、 $a_n = \frac{n}{n+2}$

【問題 4 1 (4) の解説】

この問題は、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ を使って解いていく問題です。

* $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ と \lim は、 n ではなく x です。詳しくは関数の極限で勉強することで、 $\lim_{n \rightarrow \infty}$ のときは、「 n は整数値をとりながら無限大になる」ですが、 $\lim_{x \rightarrow \infty}$ は、「 x は実数で無限大になる」です。

$f(n)$ の形によっては、必ずしも $f(n)$ がすべて整数となるとは限りません。例えば $f(n) = 2n$ のとき、 $2, 4, 6, \dots$ で整数値しかとりませんが、 $f(n) = \frac{1}{2}n$ のとき、 $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ と整数値以外もとってしまいます。

このことより、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ が既知のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)} = e$ が成立するのは、 $f(n)$ がすべて整数の値しかとらないという条件が必要ですが、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ が既知のとき、

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)} = e$ が成立するのは、 $f(n)$ は整数値をとらなくてもどんな実数をとったとしても成立してくれます。

もちろん、両方とも $f(n) \rightarrow \infty$ という条件は必要ですよ。少し、細かいです。「何言っているかわからない」という人もいると思います。そこまで重要でないので、今の段階では無視してもらってもいいですよ。

$n \rightarrow \infty$ のとき、 $f(n) \rightarrow \infty$ なら、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(n)}\right)^{f(n)}$ も e になってくれます。

数列の極限で、指数に n が含まれているときは、ほとんどの場合この e を使ってといていく問題です。

【問題 4 1 (4) の解答】

$$(a_n)^n = \left(\frac{n}{n+2}\right)^n = \left(\frac{1}{1 + \frac{2}{n}}\right)^n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^n} = \frac{1}{\left\{\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^2}$$

よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^n = \frac{1}{e^2}$

問題 4 2 (B or C)

a を正の定数とし、次のように定められた 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を考える。

$$\begin{cases} a_1 = a, & a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{4}{a_n} \right) & (n = 1, 2, 3, \dots) \\ b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 2} & & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $-1 < b_1 < 1$ であることを示せ。
- (2) b_{n+1} を a_n を用いて表せ。さらに、 b_{n+1} を b_n を用いて表せ。
- (3) b_3, b_4 をそれぞれ b_1 を用いて表せ。
さらに、数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を n と b_1 を用いて表せ。
- (4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を n と b_1 を用いて表せ。
- (5) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(電気通信大学)

【問題 4 2 (1) の解説】

$$b_1 = \frac{a_1 - 2}{a_1 + 2} = \frac{a - 2}{a + 2} = \frac{(a + 2) - 4}{a + 2} = 1 - \frac{4}{a + 2}$$

↑ $\frac{g(n)}{f(n)}$ の分数で ($g(n)$ の次数) \geq ($f(n)$ の次数) のとき、分母の次数の方が分子の次数よりも高くなる形に変形をする！という決まり事より

で、ここからの証明は、とりあえず $\frac{4}{a+2}$ の値の範囲を求めて、整理していけば自然と $-1 < b_1 < 1$ の形になってくれるます。これで証明終了です。

こういった解き方もよく出てくるので、しっかりと理解しておいてください。

【問題 4 2 (1) の解答】

$$b_1 = \frac{a_1 - 2}{a_1 + 2} = \frac{a - 2}{a + 2} = 1 - \frac{4}{a + 2}$$

$$a > 0$$

$$a + 2 > 2 \quad \leftarrow \text{両辺に 2 を加えた}$$

$$\frac{1}{a + 2} < \frac{1}{2} \quad \leftarrow \text{両辺の逆数をとった。両辺ともに正のとき、逆数をとると大小関係が入れ替わる}$$

ここで、 $a > 0$ より $\frac{1}{a+2} > 0$ となる。よって $0 < \frac{1}{a+2} < \frac{1}{2}$ となる。

$$0 < \frac{1}{a+2} < \frac{1}{2}$$

$$0 < \frac{4}{a+2} < 2 \quad \blacktriangleleft \text{すべての辺を4倍した}$$

$$-2 < -\frac{4}{a+2} < 0 \quad \blacktriangleleft \text{すべての辺に-1をかけた}$$

$$-1 < 1 - \frac{4}{a+2} < 1 \quad \blacktriangleleft \text{すべての辺に1を加えた}$$

$$-1 < b_1 < 1 \quad \blacktriangleleft b_1 = 1 - \frac{4}{a+2} \text{ より。}$$

以上より、 $-1 < b_1 < 1$ である。(証明終)

【問題42(2)の解答】

$$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} - 2}{a_{n+1} + 2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{4}{a_n} \right) - 2}{\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{4}{a_n} \right) + 2} \quad \blacktriangleleft a_{n+1} = \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{4}{a_n} \right) \text{ を代入した}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{4}{a_n} \right) - 2}{\frac{1}{2} \left(a_n + \frac{4}{a_n} \right) + 2} \times \frac{2a_n}{2a_n} \quad \blacktriangleleft \text{分数の中の分数を消すために、分母分子に} 2a_n \text{ をかけた}$$

$$= \frac{a_n \left(a_n + \frac{4}{a_n} \right) - 4a_n}{a_n \left(a_n + \frac{4}{a_n} \right) + 4a_n}$$

$$= \frac{a_n^2 - 4a_n + 4}{a_n^2 + 4a_n + 4}$$

$$= \frac{(a_n - 2)^2}{(a_n + 2)^2}$$

$$= \left(\frac{a_n - 2}{a_n + 2} \right)^2$$

$$b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 2} \text{ より、 } b_{n+1} = b_n^2$$

【問題 4 2 (3) の解説】

$b_{n+1} = b_n^2$ と指数が含まれている式です。問題 3 5 の漸化式で話したように、指数を含む漸化式は対数をとることが多いです。

ただ、今回の場合は対数をとることができません。対数は両辺ともに正の数のおきにしかとれなかったんだよね。今回は、(1) で示したように $-1 < b_1 < 1$ と b_1 は負の数になる可能性があります。

$b_1 \neq 0$ のとき、 $n \geq 2$ では、 $b_{n+1} = b_n^2$ の形より、あきらかに b_n は正だから対数をとってもらってもいいです。

ただ、問題で「 b_3, b_4 をそれぞれ b_1 で表せ」となっているよね。これは、漸化式の問題で「推定してから帰納法」といった流れの問題がありますが、それで解きなさいよというヒントです。ちなみに、この問題も帰納法で示してもらってもいいのですが、あまりにあきらかなので証明なしでも大丈夫だと思います。

【問題 4 2 (3) の解答】

$$(2) \text{ より、 } b_{n+1} = b_n^2$$

$$b_2 = b_1^2, \quad b_3 = b_2^2 = (b_1^2)^2 = b_1^4, \quad b_4 = b_3^2 = (b_1^4)^2 = b_1^8$$

$$\text{よって、 } b_3 = b_1^4, \quad b_4 = b_1^8$$

*次に b_n を求めていくんだけど、 $b_n = b_1^{\circ}$ の指数の部分は $1, 2, 4, 8, \dots$ と等比数列になっているよね。この等比数列の一般項は 2^{n-1} です。さっきも書いたけど、明らかだから証明なしで大丈夫です。

また、数列 $\{b_n\}$ の一般項は $b_n = b_1^{2^{n-1}}$ となる。

【問題 4 2 (4) の解答】

*これは単純に解いていくだけの簡単な問題です。 $b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 2}$ を a_n について解くだけの問題です。

$$b_n = \frac{a_n - 2}{a_n + 2}$$

$$b_n(a_n + 2) = a_n - 2$$

$$(b_n - 1)a_n = -2b_n - 2$$

ここで $b_n = 1$ とすると、(左辺) = 0、(右辺) = $-2 - 2 = -4 \neq 0$ より不適。よって、 $b_n \neq 1$ である。

↑ $b_n - 1$ で両辺を割りたい。0で割ってはダメなので、 $b_n - 1$ が 0 でないことを確認した！

$$\begin{aligned} a_n &= -\frac{2(b_n + 1)}{b_n - 1} \\ &= -\frac{2(b_1^{2^{n-1}} + 1)}{b_1^{2^{n-1}} - 1} \end{aligned}$$

【問題 4 2 (5) の解説】

$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n-1} = \infty$ です。また、 $-1 < r < 1$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ というのを勉強したと思うけど、今回は $-1 < b_1 < 1$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_1^n = 0$ です。

$\lim_{n \rightarrow \infty} b_1^n = 0$ ということは、 b_1° で \circ の部分が ∞ のとき、 $b_1^{\circ} = 0$ です。

今回の問題では、 $2^{n-1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$ より、 $b_1^{2^{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ です。

*大学受験の問題って一見難しそうに見えるよね。でも、問題 4 1 も問題 4 2 も、これまで勉強してきたことを使うだけ…今は、できなかったとしても、あとちょっと頑張ればできるようになりますよ。

【問題 4 2 (5) の解答】

$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n-1} = \infty$ である。また、 $-1 < b_1 < 1$ より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_1^n = 0$ であることより、 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_1^{2^{n-1}} = 0$ が言える。

$$\text{よって、} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{2(b_1^{2^{n-1}} + 1)}{b_1^{2^{n-1}} - 1} \right) = -\frac{2(0 + 1)}{0 - 1} = 2$$

問題 4 3 (B)

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がある。

$$a_1 = 12, b_1 = 0, a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n, b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) a_2, b_2, a_3, b_3 をそれぞれ求めよ。
- (2) すべての自然数 n について、 $a_n + b_n = 12$ が成り立つことを証明せよ。
- (3) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ の一般項を求めよ。
- (4) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

(大阪教育大学)

【問題 4 3 の解答】

*連立漸化式の問題です。今回の問題は (2) で、 $a_n + b_n$ と誘導がついているタイプの問題で、これにのっていけばいいだけです。それでは、解答に進みます。

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n \cdots \textcircled{1}, \quad b_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n \cdots \textcircled{2} \text{ とする。}$$

(1)

$$a_2 = \frac{3}{4}a_1 + \frac{1}{2}b_1 = \frac{3}{4} \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 9$$

$$b_2 = \frac{1}{4}a_1 + \frac{1}{2}b_1 = \frac{1}{4} \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 3$$

$$a_3 = \frac{3}{4}a_2 + \frac{1}{2}b_2 = \frac{3}{4} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{33}{4}$$

$$b_3 = \frac{1}{4}a_2 + \frac{1}{2}b_2 = \frac{1}{4} \cdot 9 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{15}{4}$$

$$\text{よって、} a_2 = 9, b_2 = 3, a_3 = \frac{33}{4}, b_3 = \frac{15}{4}$$

(2)

* $a_n + b_n = 12$ を示せとなっています。何も考えずに $\textcircled{1} + \textcircled{2}$ をやってみます。

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ より、

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} &= \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ &= a_n + b_n \end{aligned}$$

よって数列 $\{a_n + b_n\}$ は定数数列であり、 $a_n + b_n = a_1 + b_1 = 9 + 3 = 12$

以上より、 $a_n + b_n = 12$ が成立する。(証明終)

(3)

* $a_n + b_n = 12$ が成立しているので、これより $b_n = 12 - a_n$ と変形して a_n を求め、そこから b_n を求めていきます。別に最初に b_n を求めてもらってもいいですよ。

$a_n + b_n = 12$ より $b_n = 12 - a_n$ となる。これを①に代入する。

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{2}(12 - a_n) \\ &= \frac{1}{4}a_n + 6 \quad \leftarrow a_{n+1} = Aa_n + B \text{ 型の漸化式} \end{aligned}$$

特性方程式 $\alpha = \frac{\alpha}{4} + 6$ より、 $\alpha = 8$

よって、 $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n + 6$ は、 $a_{n+1} - 8 = \frac{1}{4}(a_n - 8)$ と変形できる。

数列 $\{a_n - 8\}$ は初項 $a_1 - 8 = 12 - 8 = 4$ 、公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列より

$$a_n - 8 = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \text{ となる。よって } a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} + 8$$

$a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} + 8$ を $b_n = 12 - a_n$ に代入すると

$$b_n = 12 - \left\{ \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} + 8 \right\} = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} + 4$$

以上より、 $a_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} + 8$, $b_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} + 4$

(4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} = 0 \text{ ㄹ ㄹ}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} + 8 \right\} = \mathbf{8}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ -\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} + 4 \right\} = \mathbf{4}$$

問題 4 4 (C)

O を原点とする数直線上に、点 $P_n(x_n)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を次のようにとる。ただし、 x_n は点 P_n の座標を表す。

$x_0 = 1$ とする。そして、 n が偶数なら、線分 OP_n の中点を P_{n+1} とし、 n が奇数なら、線分 P_nP_0 を $1:2$ に内分する点を P_{n+1} とする。このとき、 $m = 0, 1, 2, \dots$ に対し、

$$x_{2m+1} = \square x_{2m}$$

$$x_{2m+2} = \square x_{2m+1} + \square$$

が成り立つ。したがって、

$$x_{2m+2} = \square x_{2m} + \square$$

となり、

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m} = \square, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m+1} = \square$$

を得る。

(日本医科大学)

【問題 4 4 の解説】

なんだかややこしそうな問題です。ですが、丁寧に解いていけば簡単ですよ。内分については数学Bのベクトルで勉強しているから大丈夫だと思うけど、念のためまとめておきます。

内分の公式

数直線上の2点 $A(a)$, $B(b)$ を結ぶ線分を $m:n$ に内分する点は、 $\frac{na+mb}{m+n}$ である。

また、中点は $1:1$ に内分する点より内分の公式で $m=n=1$ とすると、 $\frac{a+b}{2}$ となる。

で、ここからは丁寧に問題文を読んで問題を解いていくだけです。一見、ややこしそうに見える問題ほど丁寧に読んでいけば簡単に解けてしまうということが多いですよ。

今回は、問題に「 n が偶数なら、線分 OP_n の中点を P_{n+1} にする」と書かれています。点 O の座標は0、点 P_n の座標は x_n です。点 $P_{n+1}(x_{n+1})$ は、線分 OP_n の中点より、 n が偶数のとき、 $x_{n+1} = \frac{0+x_n}{2} = \frac{x_n}{2}$ です。

次に、 n が奇数のときです。このとき、問題に「 n が奇数なら、線分 P_nP_0 を1:2に内分する点」と書かれています。点 P_n の座標は x_n で P_0 の座標は $x_0 = 1$ です。

内分の公式より、 n が奇数のとき、 $x_{n+1} = \frac{2 \cdot x_n + 1 \cdot 1}{1+2} = \frac{2x_n+1}{3} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3}$ です。

このことを、もう一度まとめておくと、以下のようになります。

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}x_n & \dots \textcircled{1}(n \text{が偶数のとき}) \\ \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3} & \dots \textcircled{2}(n \text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

以上のことを踏まえて、問題に進みます。

まず、最初の $x_{2m+1} = \square x_{2m}$ ですが、 $2m$ は当然偶数です。だから、さっき求めた式の①, ②の式のうちで、①の方を適用します。これ間違えやすいから気をつけてね。 $x_{2m+1} = \square x_{2m}$ で $2m+1$ は奇数だな、なんてしたらダメですよ。そうじゃなくて、右辺の方を見て、偶数です。丁寧に解くようにしてくださいね。

このことより、 $x_{2m+1} = \frac{1}{2}x_{2m}$ ◀ ①で n を $2m$ に置き換えたです。

次に、 $x_{2m+2} = \square x_{2m+1} + \square$ を考えます。今回は、さっきと同じように考えて $2m+1$ は奇数です。だから、②の方が適用できます。

このことより、 $x_{2m+2} = \frac{2}{3}x_{2m+1} + \frac{1}{3}$ ◀ ②の式で、 n を $2m+1$ で置き換えたら！

ここからは、 $x_{2m+2} = \frac{2}{3}x_{2m+1} + \frac{1}{3}$ に、 $x_{2m+1} = \frac{1}{2}x_{2m}$ を代入します。

$$\begin{aligned} \text{これより、} x_{2m+2} &= \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}x_{2m} + \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}x_{2m} + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

で、 $x_{2m+2} = \frac{1}{3}x_{2m} + \frac{1}{3}$ です。また、今回の漸化式は問題より $m \geq 0$ で成立する式です。

このまま解いていってもらってもいいのですが、式が少し汚いので $x_{2m} = y_m$ とでもおきます。

$x_{2m+2} = x_{2(m+1)} = y_{m+1}$ となるので、 $x_{2m+2} = \frac{1}{3}x_{2m} + \frac{1}{3}$ ($m \geq 0$) は、 $y_{m+1} = \frac{1}{3}y_m + \frac{1}{3}$ ($m \geq 0$) です。ここからは、簡単な漸化式の問題です。いつもと違うのは、 m が 1 以上でなく、0 以上ですので、それに注意する必要があります。

ちなみに、 $a_{n+1} = ra_n$ ($n \geq 1$) の漸化式の場合、一般項 a_n は $a_n = a_1r^{n-1}$ です。

でも、 $a_{n+1} = ra_n$ ($n \geq 0$) の場合、この式に $n = 0$ を代入すると $a_1 = ra_0$ より、 $a_n = a_1r^{n-1} = ra_0 \cdot r^{n-1} = a_0r^n$ と変形できます。この式変形は案外理解できていない人が多いので、気をつけてくださいね。

$y_{m+1} = \frac{1}{3}y_m + \frac{1}{3}$ ($m \geq 0$)...③ を解いていきます。

特性方程式より $\alpha + \frac{1}{3}\alpha = \frac{1}{2}$ で、これを解くと $\alpha = \frac{1}{2}$

よって、③ は $y_{m+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(y_m - \frac{1}{2}\right)$ ($m \geq 0$) と変形できる。

よって、 $y_m - \frac{1}{2} = \left(y_0 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^m$ となる。

↑ $a_{n+1} = ra_n$ ($n \geq 0$) のとき、 $a_n = a_0r^n$ と変形できる

よって、 $y_m = b_0 \left(\frac{1}{3}\right)^m + \frac{1}{2}$ となり、 $x_{2m} = y_m$ より、 $x_{2m} = b_0 \left(\frac{1}{3}\right)^m + \frac{1}{2}$ です。ここからは、簡単なので解けると思います。

それでは、答案に進みます。

【問題 4 4 の解答】

$$x_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2}x_n & (n \text{ が偶数のとき}) \\ \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{3} & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \quad \text{となる。}$$

よって、 $x_{2m+1} = \frac{1}{2}x_{2m}$ 、 $x_{2m+2} = \frac{2}{3}x_{2m+1} + \frac{1}{3}$ となる。

$$x_{2m+2} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}x_{2m} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}x_{2m} + \frac{1}{3}$$

よって、 $x_{2m+2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(x_{2m} - \frac{1}{2}\right)$ となる。

これより、 $x_{2m} = \left(x_0 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^m + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^m + \frac{1}{2}$ ($\because x_0 = 1$)

ここで、 $\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^m = 0$ より、 $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^m + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

また、 $x_{2m+1} = \frac{1}{2}x_{2m}$ より、 $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2}x_{2m} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$ ($\because \lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m} = \frac{1}{2}$)

以上より、 $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{2m+1} = \frac{1}{4}$

*最後で x_{2m+1} を求める必要はないですよ。極限值を求めるだけなら、上記の解答のようにやった方がラクです。

問題 4 5 (B) 教科書

数列 $\{a_n\}$ は $a_1 > 0$, $a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 10}$ ($n \geq 1$) をみたすものとする。

(1) $|a_{n+1} - 5| \leq \frac{3}{5}|a_n - 5|$ を証明せよ。

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

【問題 4 5 の解説】

このタイプの問題は、大学受験で超がつくくらい頻出の問題です。やや独特な解き方をするので、しっかりと理解しておいてくださいね。

(1) で「 $|a_{n+1} - 5| \leq |a_n - 5|$ を示せ」です。

普通、不等式の証明って (右辺) - (左辺) をして 0 以上と示していくか、後は今回の問題は自然数の n が含まれているから帰納法を使って示すのかな？なんて思い出すよね。

もちろん、こういった問題でも上記のような手法で解けない訳ではない (ことも多い) けど、一般的に次のように解いていきます。

$a_{n+1} - \alpha < \beta(a_n - \alpha)$, $|a_{n+1} - \alpha| < \beta|a_n - \alpha|$, $1 - a_{n+1} < 2(1 - a_n)$ といった問題では、左辺の $a_{n+1} - \alpha$ の部分を変形すると必ず $a_{n+1} - \alpha = \bigcirc(a_n - \alpha)$ の形になってくれます。

このことを使ってこういったタイプの不等式を示していきます。「ホントにうまくいくの？」と思えるような問題でも、必ずうまくいくように作ってくれています。受験ではよく出てくるので、理解しておいてくださいね。それでは、実際に解いてみます。

とりあえず、 $|a_{n+1} - 5|$ を変形していってみます。そうすると、必ず $|a_{n+1} - 5| = \bigcirc|a_n - 5|$ の形になってくれます。

$$\begin{aligned}
& |a_{n+1} - 5| \\
= & \left| \sqrt{3a_n + 10} - 5 \right| \leftarrow a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 10} \text{ を代入した} \\
= & \left| (\sqrt{3a_n + 10} - 5) \cdot \frac{\sqrt{3a_n + 10} + 5}{\sqrt{3a_n + 10} + 5} \right| \\
& \uparrow \text{ とりあえず有理化をした (ルートを含んでいる式で変形は有理化ぐらいしかない!)} \\
= & \left| \frac{3a_n + 10 - 25}{\sqrt{3a_n + 10} + 5} \right| \\
= & \left| \frac{3(a_n - 5)}{\sqrt{3a_n + 10} + 5} \right|
\end{aligned}$$

* $|a_{n+1} - 5|$ を何も考えずに式変形したら、上記のようになりました。

「式変形をしないとイケないけど、ルートを含んでいるから有理化くらいしかできることがない。(うまくいくかどうかかわからないけど) とりあえず有理化してみよう」といった感じで変形をただけです。

そうすると $|a_{n+1} - 5| = \left| \frac{3(a_n - 5)}{\sqrt{3a_n + 10} + 5} \right|$ となりました。

右辺は、 $\left| \frac{3(a_n - 5)}{\sqrt{3a_n + 10} + 5} \right| = \left| \frac{3}{\sqrt{3a_n + 10} + 5} \right| \cdot |a_n - 5|$ と変形できます。これで当初予想した通り、 $|a_{n+1} - 5| = \bigcirc \cdot |a_n - 5|$ の形になってくれました。

こういったタイプの問題は、必ずこういうふうになってくれます。覚えておいてくださいね。

ここからは、 $\left| \frac{3}{\sqrt{3a_n + 10} + 5} \right|$ の範囲を考えます。もし、これが $\frac{3}{5}$ 以下ということが言えたら、今回の問題で示したい式の $|a_{n+1} - 5| \leq \frac{3}{5} |a_n - 5|$ を示したことになります。

まず、絶対値がついているけど、絶対値の中身は $\frac{3}{\sqrt{3a_n + 10} + 5}$ で、絶対値の中身は当然正です。ですから、 $\left| \frac{3}{\sqrt{3a_n + 10} + 5} \right| = \frac{3}{\sqrt{3a_n + 10} + 5}$ です。

あとは、 $\frac{3}{\sqrt{3a_n+10}+5}$ の部分が $\frac{3}{5}$ 以下ということが言えればOKなんだよね。でも、これは $\sqrt{3a_n+10} > 0$ より明らかに成立しています。だって、分母は $\sqrt{3a_n+10}+5 > 5$ です。5より大きいってことは $\frac{1}{\sqrt{3a_n+10}+5} < \frac{1}{5}$ になるもんね。以下のように答案をかいてもらえば大丈夫です。

$$\sqrt{3a_n+10} > 0$$

$$\sqrt{3a_n+10}+5 > 5 \quad \leftarrow \text{両辺に5を加えた}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3a_n+10}+5} < \frac{1}{5} \quad \leftarrow \text{両辺の逆数をとった。両辺とも正の時、逆数をとると大小関係が逆になる}$$

$$\frac{3}{\sqrt{3a_n+10}+5} < \frac{3}{5} \quad \leftarrow \text{両辺に3をかけた}$$

これより、 $|a_{n+1}-5| = \left| \frac{3}{\sqrt{3a_n+10}+5} \right| \cdot |a_n+5| \leq \frac{3}{5}|a_n-5|$ が示せたこととなります。

【注】

「あれっ？示したい式は $|a_{n+1}-5| \leq \frac{3}{5}|a_n-5|$ というふうに、不等号にイコールが含まれた式だったのに、 $\frac{3}{\sqrt{3a_n+10}+5} < \frac{3}{5}$ では含まれていなかった。大丈夫なのかな？」なんておもっちゃいますよね。

でも大丈夫なんです。 $A \leq B \Leftrightarrow (A < B \text{ または } A = B)$ が成立しています。これより、 $A < B \Rightarrow A \leq B$ が成立しています（矢印の向きに注意してね）

$|a_{n+1}-5| < \frac{3}{5}|a_n-5| \Rightarrow |a_{n+1}-5| \leq \frac{3}{5}|a_n-5|$ です。ですから、 $|a_{n+1}-5| < \frac{3}{5}|a_n-5|$ がいえるとき、 $|a_{n+1}-5| \leq \frac{3}{5}|a_n-5|$ も言えたこととなります。

こういった、不等号の等号を気にしないといけない問題は数学IIIでは頻出です。しっかりと理解しておいてくださいね。

【問題 4 5 (1) の解答】

$$\begin{aligned} & |a_{n+1} - 5| \\ = & |\sqrt{3a_n + 10} - 5| \quad \blacktriangleleft a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 10} \text{ を代入した} \\ = & \left| (\sqrt{3a_n + 10} - 5) \cdot \frac{\sqrt{3a_n + 10} + 5}{\sqrt{3a_n + 10} + 5} \right| \\ = & \left| \frac{3a_n + 10 - 25}{\sqrt{3a_n + 10} + 5} \right| \\ = & \left| \frac{3(a_n - 5)}{\sqrt{3a_n + 10} + 5} \right| \\ = & \frac{3}{\sqrt{3a_n + 10} + 5} |a_n - 5| \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

ここで、 $\sqrt{3a_n + 10} > 0$

$$\sqrt{3a_n + 10} + 5 > 5 \quad \blacktriangleleft \text{両辺に } 5 \text{ を加えた}$$

$$\frac{1}{\sqrt{3a_n + 10} + 5} < \frac{1}{5} \quad \blacktriangleleft \text{両辺の逆数をとった。両辺とも正の時、逆数をとると大小関係が逆になる}$$

$$\frac{3}{\sqrt{3a_n + 10} + 5} < \frac{3}{5} \cdots \textcircled{2} \quad \blacktriangleleft \text{両辺に } 3 \text{ をかけた}$$

①, ② より、 $|a_{n+1} - 5| = \frac{3}{\sqrt{3a_n + 10} + 5} |a_n - 5| < \frac{3}{5} |a_n - 5|$ が成立する。

以上より、 $|a_{n+1} - 5| \leq \frac{3}{5} |a_n - 5|$ が成立する。(証明終)

【問題 4 5 (2) の解説】

不等式の漸化式です。

$a_{n+1} < ra_n \cdots \textcircled{1}$ この式で、 n のところを $n-1$ で置き換えると、 $a_n < ra_{n-1} \cdots \textcircled{2}$ です。この式で、 n を $n-1$ で置き換えると、 $a_{n-1} < ra_{n-2} \cdots \textcircled{3}$ です。

②, ③ より $a_n < ra_{n-1} < r \cdot ra_{n-2} = r^2 a_{n-2}$ です。

これを続けていくと、 $a_n < ra_{n-1} < r^2a_{n-2} < r^3a_{n-3} < \dots < r^{n-1}a_1$ となってくれます。

また、絶対値を含んだ極限で $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \alpha| = 0$ のとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ となることは証明なしで使ってもらってOKです。以上のことを踏まえて、解答に進みます。

【問題 4 5 (2) の解答】

$$(1) \text{ より、} |a_{n+1} - 5| \leq \frac{3}{5}|a_n - 5|$$

$$|a_n - 5| \leq \frac{3}{5}|a_{n-1} - 5| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^2 |a_{n-2} - 5| \leq \dots \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} |a_1 - 5|$$

ここで、 $|a_n - 5| \geq 0$ ◀ 絶対値の値は当然 0 以上 より、

$$0 \leq |a_n - 5| \leq \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} |a_1 - 5| \text{ が成立する。}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} |a_1 - 5| = 0$$

はさみうちの原理より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - 5| = 0$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 5 \text{ ◀ } \lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \alpha| = 0 \text{ のとき、} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \text{ より}$$

問題 4 6 (B)

$a_1 = 0, a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{4}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定義される数列 $\{a_n\}$ について、次の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq a_n < 1$ が成り立つことを、数学的帰納法で示せ。
- (2) $1 - a_{n+1} < \frac{1 - a_n}{2}$ が成り立つことを示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(岡山県立大学)

【問題 4 6 (1) の解説】

この問題も、問題 4 5 と同じタイプの問題です。

まず、(1) ですが、「帰納法で示せ」となっていますが、これはこの言葉がなくても「帰納法で示すのかな？」と思えるようになっておいてくださいね。

たまに、「帰納法はどういったときに使うのですか？」と質問を受けます。帰納法は、「証明する式に自然数が含まれているとき」に使います。

証明する式に、自然数が含まれているときは「帰納法で示すのかな？」なんて考えるようにしておいてください。もちろん、自然数が含まれているときでも帰納法以外の解き方をすることもあります。そのあたりは柔軟性を持って考えるようにしておいてください。

【問題 4 6 (1) の解答】

$0 \leq a_n < 1 \dots \textcircled{*}$ であることを数学的帰納法で示す。

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{4} \dots \textcircled{1} \text{ とする。}$$

(i)

$n = 1$ のとき、 $a_1 = 0$ より、 $\textcircled{*}$ は成立。

(ii)

$n = k$ (k は自然数) のとき、 $\textcircled{*}$ が成立すると仮定する。

$0 \leq a_k < 1 \cdots \textcircled{2}$ が成立する。

*示したい式は、 $0 \leq a_{k+1} < 1$

① より、 $a_{k+1} = \frac{a_k^2 + 3}{4}$ となる。

*上記は、① の式 $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{4}$ で n を k に置き換えた式です。よく、こんなことして OK なんですか？と質問を受けますが、大丈夫ですよ。① は、すべての自然数 n で成立します。ですから、 n の部分は自然数であれば何をいれても OK です。 k は自然数なので、 n のところに k を入れても大丈夫です。

② より、

$$0 \leq a_k^2 < 1$$

$$3 \leq a_k^2 + 3 < 4 \quad \blacktriangleleft \text{すべての辺に 3 を加えた}$$

$$\frac{3}{4} \leq \frac{a_k^2 + 3}{4} < 1 \quad \blacktriangleleft \text{すべての辺を 4 で割った}$$

$$\frac{3}{4} \leq a_{k+1} < 1 \quad (\because a_{k+1} = \frac{a_k^2 + 3}{4})$$

↑ $0 \leq a_k^2 < 1$ を少しずつ変形をして、 $\frac{a_k^2 + 3}{4}$ つまり a_{k+1} の範囲を求めた！こういった、式変形はよく出てくるから覚えておいてくださいね。

よって、 $0 \leq a_{k+1} < 1$ が成立する。

↑ $\frac{3}{4} \leq a_{k+1} < 1$ が成立しているとき、当然 $0 \leq a_{k+1} < 1$ も当然成立しています。

当たり前といえば、当たり前なんだけど、こういうの気づきにくいよね。これが、変形したものが $\frac{3}{4} \leq a_{k+1} < 1$ ではなく、 $0 \leq a_{k+1} < 1$ だったらすぐに気づけるのに…なんて思ってしまう。でも、「よく出てくるか形」ですので慣れてもらうしかないです。

僕も、受験生の頃はこういった式変形ができなくて困っていましたが、でも、慣れてきたらできるようになりますよ。そして、回数をこなしていれば、いつの間にか簡単に解けるようになってきます。

最初難しく感じるのは、みんなそうですよ。何度も解いてできるようになってもらったらいいだけです。

$n = k + 1$ のときも $\textcircled{*}$ は成立する。

よって、すべての自然数 n について、 $\textcircled{*}$ は成立する。(証明終)

【問題 4 6 (2) の解答】

*これは、問題 4 5 とまったく同じようにして解いていきます。問題 (2) は、左辺の $1 - a_{n+1}$ を変形すると、 $\textcircled{\circ} \cdot (1 - a_n)$ の形になってくれます。こういったタイプの問題は、まずこういうふうに変形できるので解法を覚えておいてくださいね。

$$\begin{aligned} 1 - a_{n+1} &= 1 - \frac{a_n^2 + 3}{4} \leftarrow a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 3}{4} \text{ より} \\ &= \frac{4 - (a_n^2 + 3)}{4} \\ &= \frac{1 - a_n^2}{4} \\ &= \frac{(1 + a_n)(1 - a_n)}{4} \\ &= \frac{1 + a_n}{4} (1 - a_n) \leftarrow \text{予想したとおり、} 1 - a_{n+1} = \textcircled{\circ} \cdot (1 - a_n) \text{ の形になった！} \end{aligned}$$

ここで、(1) より $a_n < 1$ がいえる。これより、 $\frac{1 + a_n}{4} < \frac{1}{2}$ が言える。

よって、 $1 - a_{n+1} < \frac{1 - a_n}{2}$ が言える。(証明終)

【問題46(3)の解答】

(2) で示した式 $1 - a_{n+1} < \frac{1 - a_n}{2} \dots \textcircled{3}$ とする。

$$\text{これより } 1 - a_n < \frac{1}{2}(1 - a_{n-1}) < \left(\frac{1}{2}\right)^2(1 - a_{n-2}) < \dots < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(1 - a_1)$$

$a_1 = 0$ であることより、 $1 - a_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ が成立する。よって、 $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < a_n \dots \textcircled{3}$ がいえる。また、(1) より、 $0 \leq a_n < 1 \dots \textcircled{4}$ となる。

$$\textcircled{3}, \textcircled{4} \text{ より、 } 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < a_n < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$$

はさみうちの原理より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$

問題 4 7 (B or C)

数列 $\{a_n\}$ を初項 $a_1 = 1$, 漸化式 $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ ($n \geq 1$) により定義する。このとき、以下の問いに答えなさい。

- (1) すべての自然数 n に対して、 $1 \leq a_n < 2$ が成り立つことを証明しなさい。
- (2) すべての自然数 n に対して、 $2 - a_{n+1} \leq \frac{1}{2 + \sqrt{3}}(2 - a_n)$ が成り立つことを証明しなさい。
- (3) 数列 $\{a_n\}$ が収束することを示し、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

(首都大学)

【問題 4 7 の解説】

この問題も、問題 4 5 や問題 4 6 と同じタイプの問題です。よく出てきます。それだけ重要ってことだから、しっかりと理解しておいてくださいね。

【問題 4 7 の解答】

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2} \cdots \textcircled{1}$$

- (1) $1 \leq a_n < 2 \cdots \textcircled{*}$ を示す。

(i) $n = 1$ のとき

$a_1 = 1$ より、 $\textcircled{*}$ は成立する。

(ii) $n = k$ のとき、 $\textcircled{*}$ が成立すると仮定する。

$$1 \leq a_k < 2$$

$$3 \leq a_k + 2 < 4 \quad \blacktriangleleft \text{すべての辺に 2 を加えた}$$

$$\sqrt{3} \leq \sqrt{a_k + 2} < 2 \quad \blacktriangleleft \text{すべての辺のルートをとった。}$$

$$\sqrt{3} \leq a_{k+1} < 2 \quad \blacktriangleleft a_{k+1} = \sqrt{a_k + 2} \text{ より}$$

$\sqrt{3} \leq a_{k+1} < 2$ が成立するとき、 $1 \leq a_{k+1} < 2$ も成立する。よって、 $n = k + 1$ のときも $\textcircled{*}$ は成立する。

以上より、すべての自然数 n で、 $\textcircled{*}$ が成立する。(証明終)

- (2) * $2 - a_{n+1} = 2 - \sqrt{a_n + 2}$ を変形すると、 $2 - a_{n+1} = \bigcirc \cdot (2 - a_n)$ の形になってくれるはずですが。ただ、 $2 - \sqrt{a_n + 2}$ を変形しろと言われても有理化をするぐらいしかないので有理化をしていきます。

$$\begin{aligned}
 2 - a_{n+1} &= 2 - \sqrt{a_n + 2} \\
 &= (2 - \sqrt{a_n + 2}) \cdot \frac{2 + \sqrt{a_n - 2}}{2 + \sqrt{a_n - 2}} \quad \leftarrow \text{有理化をした!} \\
 &= \frac{4 - (a_n + 2)}{2 + \sqrt{a_n + 2}} \\
 &= \frac{1}{2 + \sqrt{a_n + 2}} \cdot (2 - a_n) \cdots \textcircled{2} \quad \leftarrow 2 - a_{n+1} = \bigcirc \cdot (2 - a_n) \text{ の形になった!}
 \end{aligned}$$

(1) より、 $a_n \geq 1$ が成立する。

$$a_n \geq 1$$

$$a_n + 2 \geq 3 \quad \leftarrow \text{両辺に 2 を加えた}$$

$$\sqrt{a_n + 2} \geq \sqrt{3} \quad \leftarrow \text{両辺にルートをとった。両辺ともに正なので、ルートをとれる!}$$

$$2 + \sqrt{a_n + 2} \geq 2\sqrt{3} \quad \leftarrow \text{両辺に 2 を加えた}$$

$$\frac{1}{2 + \sqrt{a_n + 2}} \leq \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \cdots \textcircled{3} \quad \leftarrow \text{逆数をとった。両辺ともに正の時、逆数をとると大小関係が逆になる}$$

$$\textcircled{2}, \textcircled{3} \text{ より、} 2 - a_{n+1} \leq \frac{1}{2 + \sqrt{3}}(2 - a_n) \text{ が成立する。 (証明終)}$$

(3) (2) より、 $2 - a_n \leq \frac{1}{2 + \sqrt{3}}(2 - a_{n-1})$ がいえる。

$$2 - a_n \leq \frac{1}{2 + \sqrt{3}}(2 - a_{n-1}) \leq \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^2 (2 - a_{n-2}) \leq \cdots \leq \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^{n-1} (2 - a_1)$$

また、 $a_1 = 1$ より、 $2 - a_n \leq \frac{1}{2 + \sqrt{3}}(2 - a_{n-1}) = \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^{n-1}$ となる。

(1) より、 $2 - a_n > 0$ となる。これとあわせて $0 < 2 - a_n \leq \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^{n-1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^{n-1} = 0 \left(\because 0 < \frac{1}{2 + \sqrt{3}} < 1\right)$$

よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - a_n) = 0$ となる。

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$$

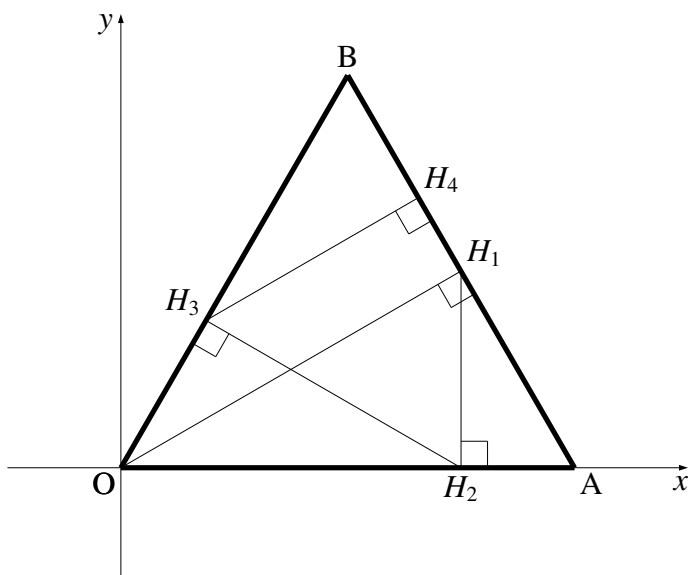
問題 48 (B)

3点 $(0,0), A(2,0), B(1, \sqrt{3})$ を頂点とする $\triangle OAB$ がある。点 O から辺 AB に引いた垂線を OH_1 とする。次に、点 H_1 から辺 OA に引いた垂線を H_1H_2 、点 H_2 から辺 OB に引いた垂線を H_2H_3 、点 H_3 から辺 AB に引いた垂線を H_3H_4 とする。以下、辺 OA, OB, AB 上に、この順で垂線を引くことを繰り返し、点 H_n を決め、線分 $H_{n-1}H_n$ の長さを $a_n (n \geq 2)$ とする。 $a_1 = OH_1$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。
- (2) a_n を n を用いて表せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。

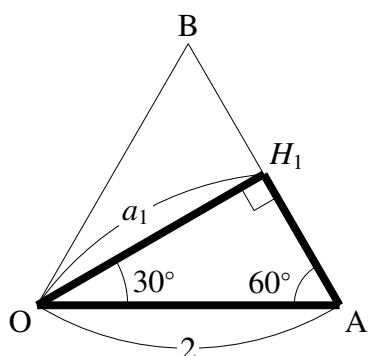
(岐阜薬科大学)

【問題 48 の解説】



こういった図形の問題はとりあえず図形を丁寧にかいて考えていきます。一見、難しそうな問題も多いですが、解いていけばあっさり解けてしまうという問題も少なくないですよ。

今回与えられている三角形 ABC は 1 辺の長さが 2 の正三角形です。



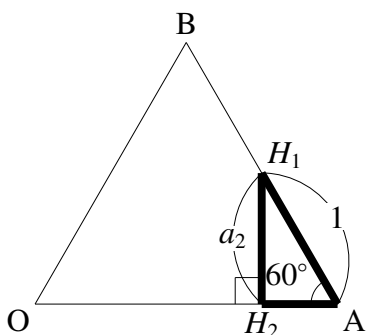
まずは、 a_1 を求めます。 a_1 は $\triangle OAH_1$ に着目して解いていきます。

$$\sin 60^\circ = \frac{a_1}{2} \text{ より、 } a_1 = \sqrt{3}$$

また、図より $\cos 60^\circ = \frac{AH_1}{OA}$ となる。よって、 $AH_1 = 1$ ◀ 次の問題で使います。

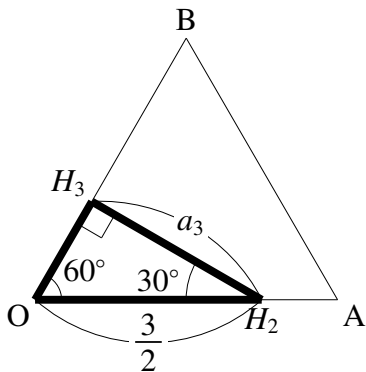
*まあ、今回の問題だったら簡単だからここまで丁寧に三角形をかき出す必要はないかもしれませんが、こういうふうに長さを求めるとき、とある三角形に着目をして解いていくことが多いです。「どの、三角形に着目するんだろう？」なんて考えて、上図のように必要な三角形だけかき出して考えるようにしたらラクにいくことが多いです。

次に $H_1H_2 = a_2$ を求める。三角形 H_1H_2A に着目します。



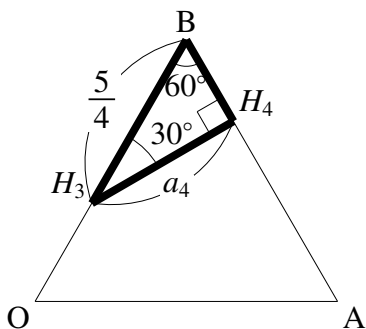
$$\sin 60^\circ = \frac{a_2}{AH_1} \text{ よって } a_2 = AH_1 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

また、 $H_2A = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ 。 $OH_2 = OA - H_2A = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ◀ 次の問題で使います



図より、 $\cos 30^\circ = \frac{H_2H_3}{OH_2}$ 。 よって、 $a_3 = \frac{3}{4} \sqrt{3}$

$OH_3 = \frac{3}{4}$ より、 $BH_3 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$ ◀ 次の問題で使います。



図より、 $\cos 30^\circ = \frac{H_3H_4}{BH_3}$ 。 よって、 $a_4 = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{8} \sqrt{3}$

【問題 48 (1) の解答】

$\cos 60^\circ = \frac{AH_1}{OA}$ となる。 よって、 $AH_1 = 1$

$\sin 60^\circ = \frac{a_2}{AH_1}$ よって $a_2 = AH_1 \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

また、 $H_2A = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ 。 $OH_2 = OA - H_2A = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ 、 $\cos 30^\circ = \frac{H_2H_3}{OH_2}$

よって、 $a_3 = \frac{3}{4} \sqrt{3}$

$$OH_3 = \frac{3}{4} \text{ より、 } BH_3 = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{H_3H_4}{BH_3}。 \text{ よって、 } a_4 = \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5}{8} \sqrt{3}$$

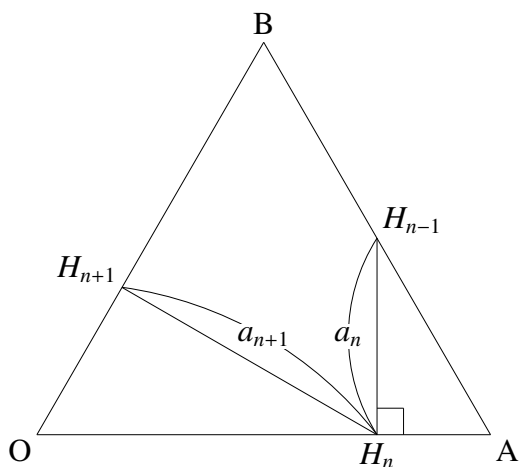
【問題 4 8 (2) の解説】

図に H_{n-1}, H_n, H_{n+1} をかいて、 a_{n+1} と a_n の関係式を導きます。こういった問題は、こういうふうに分けて a_{n+1} と a_n の関係を求めて解いていきます。ただ、やることとしては (1) とほとんど同じなので比較的簡単です。

今回、 $\triangle ABC$ は正三角形です。点 H_n が、どの辺上の点でも a_{n+1} と a_n は同じ関係になります。

【問題 4 8 (2) の解答】

点 H_n が辺 OA 上にあるとき



$$\tan 60^\circ = \frac{H_{n-1}H_n}{AH_n} \quad \blacktriangleleft \triangle H_{n-1}H_nA \text{ に着目した}$$

$$\sqrt{3} = \frac{a_n}{AH_n}$$

$$AH_n = \frac{a_n}{\sqrt{3}}$$

$$H_nO = OA - AH_n \text{ より、 } H_nO = 2 - \frac{a_n}{\sqrt{3}} \text{ となる。}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{H_{n+1}H_n}{OH_n} \quad \blacktriangleleft \Delta H_{n+1}OH_n \text{ に着目した}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{a_{n+1}}{2 - \frac{a_n}{\sqrt{3}}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(2 - \frac{a_n}{\sqrt{3}}\right) = a_{n+1}$$

$$a_{n+1} = \sqrt{3} - \frac{a_n}{2} \dots \textcircled{1} \quad \blacktriangleleft \text{これで } a_n \text{ と } a_{n+1} \text{ の関係式が導けた！後はこの漸化式を解いていくだけです。}$$

$\triangle ABC$ は正三角形である。対称性より、点 H_n が辺 OB, AB 上にあるときも同様である。

特性方程式 $\alpha = \sqrt{3} - \frac{\alpha}{2}$ を解くと、 $\alpha = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ となる。

これより、 $\textcircled{1}$ は、 $a_{n+1} - \frac{2}{3}\sqrt{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ と変形できる。

数列 $\left\{a_n - \frac{2}{3}\sqrt{3}\right\}$ は、初項 $a_1 - \frac{2}{3}\sqrt{3} = \sqrt{3} - \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列より、

$$a_n - \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ となる。}$$

$$\text{よって、} a_n = \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

【問題 48 (3) の解答】

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0 \text{ となる。}$$

$$\text{よって、} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

問題 49 (D)

直角三角形 $\triangle ABC$ において $\angle B$ は直角であるとし、辺 AC の長さを α とする。辺 AC を n 等分し、その分点を A に近い方から順に $D_1, D_2, D_3, \dots, D_{n-1}$ とおく。 $1 \leq k \leq n-1$ に対し、線分 BD_k の長さを L_k とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (L_k)^2$ を α と n で表せ。

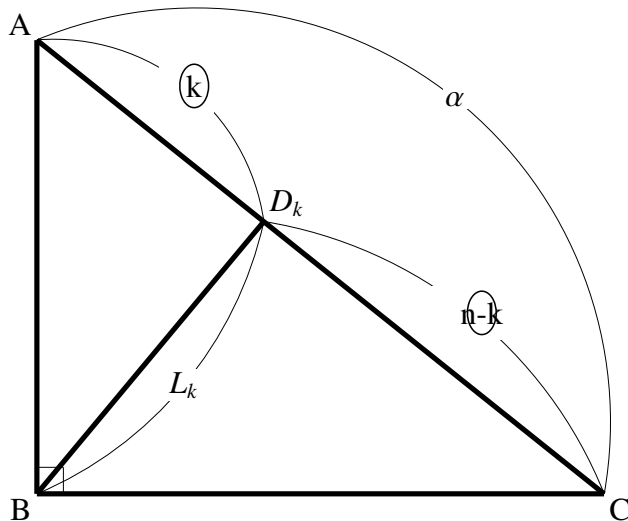
(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$ を α で表せ。

(北海道大学)

【問題 49 の解説】

北海道大学の 2009 年前期試験の過去問です。一見、簡単そうですがかなり難しいです。

「これぞ受験問題」といった感じで独特の考え方をして解いていきます。ほとんどの人にとっては、今回の問題の発想法は難しいと思います。詳しく解説をしていきます。「ああ、こういうふうに考えていくんだな」と、受験問題に慣れていってください。



今回の問題は、 $S_n = \sum_{k=1}^{n-1} (L_k)^2$ を求めよです。で、どうしようかな？と考えるだけど、これを求めるにはとりあえず $(L_k)^2$ を α, n, k を使って求めるのかな？と考えるよね（そうじゃないと、シグマの計算ができない）。

そこで、考えてみると $\triangle D_k BC$ または $\triangle ABD_k$ を使って、余弦定理を使えば $(BD_k)^2$ を求めることができるよね。

じゃあ、とりあえず余弦定理でやってみようと思えるけど… $\triangle D_k BC$ で余弦定理を使って考えると $(BD_k)^2 = (CD_k)^2 + (CB)^2 - 2CD_k \cdot CB \cos C$ となります。ここで $AD_k : D_k C = k : n - k$ であることと $AC = \alpha$ であることより、 $CD_k = \frac{n-k}{n}\alpha$ と CD_k は n, k, α のみで表せます。

あとは、 BC と $\cos C$ が必要です。とりあえず、 $AB = y, BC = x$ などとおいて $\cos C = \frac{x}{\alpha}$ として解いていってみます。

今回 $\triangle ABC$ は、直角三角形です。これより、 $x^2 + y^2 = \alpha^2$ ◀ **三平方の定理** が成立します。

*これって意外に重要です。数学って、「与えられた条件を使って解いていきます(数学で必要のない条件は与えられない)。逆から言えば、与えられた条件は必ず使い切らないといけない！」。

今回は、直角三角形という条件が与えられています。この条件を使うために三平方の定理を使いました。

今回は、直角三角形という簡単な条件でしたので、簡単に思いつけたと思います。ですが、少し複雑なものになるとわかりにくいものも少なくありません。問題文で、 $\bigcirc\bigcirc$ という条件が与えられているときは、「この $\bigcirc\bigcirc$ という条件をどうしたら使えるだろう?」「行き詰まったけど、まだこの $\bigcirc\bigcirc$ を使っていないな。なら、この条件をいかにして使えるか考えてみよう」と考えていきます。

元に戻ります。余弦定理の式で、

$$\begin{aligned}(BD_k)^2 &= (CD_k)^2 + (CB)^2 - 2CD_k \cdot CB \cos C \\ &= \left(\frac{n-k}{n}\alpha\right)^2 + x^2 - 2\frac{n-k}{n}\alpha \cdot x \cdot \frac{x}{\alpha} \dots \textcircled{1}\end{aligned}$$

後は、 $x^2 + y^2 = \alpha^2$ を使って $\textcircled{1}$ を n, k, α のみで表したいんだけど、これはちょっと無理。なぜ、無理かということそもそも $\textcircled{1}$ の右辺に、 y が含まれていない。

ということは、 $x^2 + y^2 = \alpha^2$ を利用して、 x と y を消去して n, k, α のみで表すことなんてとうていできない。

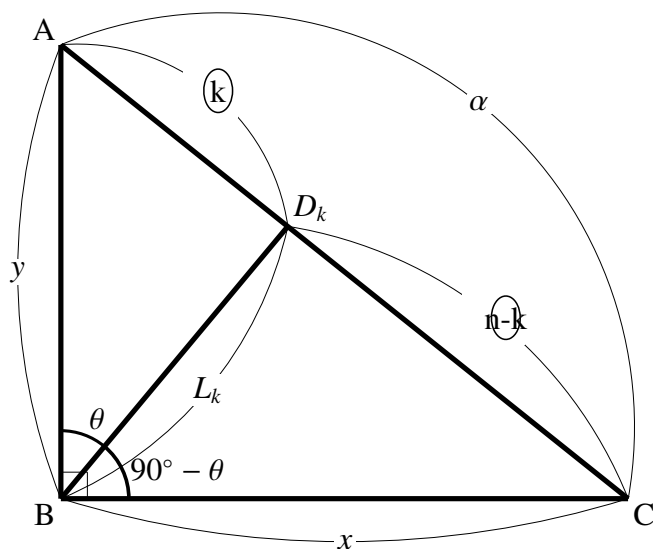
もう、一方の三角形の $\triangle ABD_k$ で余弦定理をたててもうまくいかない... ということは余弦定理の解法はうまくいきそうにない...

そこで、別の解法を考えます。

*問題集に載っている解答なんかを見て、「なんでそんな解法思いつくの？」なんてことがありますよね。もちろん、気づかないといけない解法もあるんだけど、大学受験の問題となると、一見しただけでは分からない問題も少なくないです。

そんなときは、とりあえずできそうなことをやってみます。それで、うまくいけばOKだし、うまくいかなければまた別の解法を考えます。思いついた解法を、しらみつぶしでやっていっているだけです。

じゃあ、面積を使った解き方でやってみよう。



上図より、 $(\triangle ABC) = (\triangle ABD_k) + (\triangle BCD_k)$ なんてするのかな？なんて思いやってみたけど、上手く行かない（実際やってみたら分かりますよ）。

そこで、また別の考え方をしないとイケない！で、今回は、次のように解けばうまくい

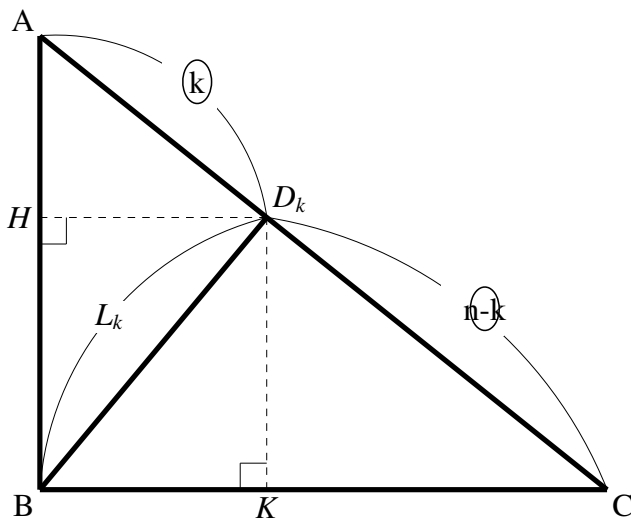
きます。

*はっきり言って、今回の解法はなかなか思いつかないですよ。勘のいい人ならスッといくかもしれないけど大多数の人は無理。でも、国立大学の問題って5問で120分というところが多いです。今、解いている北大もそうです。なら、単純計算で一問あたり24分かけることができます。

この問題は、解法が思いついてしまえば解くのにそんなに時間がかからない問題（10分程度で解けて欲しい）です。

ということは、考える時間が10分以上あります。その時間で「あーでもない、こーでもない」といろいろと考えてなんとか解法にたどりつきます。

この問題に限った話じゃないです。「考えて解法を思いつけ」と言いました。でも、それほどパターンがある訳ではないんです。ある程度、解法のパターンを頭にたたき込んでいけば、自然と思いつけるようになってきます。誰でも最初は難しいですよ。そのことを念頭において頑張ってください。



図より、 $D_kH = \frac{k}{n}BC$, $D_kK = \frac{n-k}{n}AB$ が成立。

三平方の定理より、 $(BD_k)^2 = (D_kH)^2 + (D_kK)^2$ がいえる。

$$\begin{aligned}
\text{よって、} (L_k)^2 &= (D_k H)^2 + (D_k K)^2 \\
&= \left(\frac{k}{n} BC\right)^2 + \left(\frac{n-k}{n} AB\right)^2 \\
&= \frac{k^2 BC^2 + (n-k)^2 AB^2}{n^2}
\end{aligned}$$

*とりあえず $(L_k)^2$ が表せたので、 $\sum_{k=1}^{n-1} (L_k)^2$ をやってみます。

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1} (L_k)^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2 BC^2 + (n-k)^2 AB^2}{n^2} \\
&= \frac{BC^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \frac{AB^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2
\end{aligned}$$

ここで、 $\sum_{k=1}^n (n-k)^2 = \sum_{k=1}^n k^2$ より *下記の注を参照

$$\begin{aligned}
&= \frac{BC^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \frac{AB^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\
&= \frac{AB^2 + BC^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\
&= \frac{\alpha^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \quad (\because AB^2 + BC^2 = \alpha^2)
\end{aligned}$$

↑ これで $\triangle ABC$ が直角三角形という条件を使えた。数学では、与えられた条件はすべて使う！

$$= \frac{\alpha^2}{n^2} \cdot \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1)$$

【注】 $\sum_{k=1}^n (n-k)^2 = \sum_{k=1}^n k^2$ について

$\sum_{k=1}^n (n-k)^2 = \sum_{k=1}^n k^2$ が成立することは、実際にかき出してもらえば分かると思います。シグマの問題では、具体的にかき出してみる、というのが鉄則です。

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 \\
&= (n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \dots + \{n-(n-1)\}^2 \quad \blacktriangleleft \text{シグマを具体的にかき出してみた} \\
&= (n-1)^2 + (n-2)^2 + (n-3)^2 + \dots + 1^2
\end{aligned}$$

とりあえず具体的にシグマをかき出したら上記のようになるけど、これは右から書き直

してみると $1^2 + \dots + (n-2)^2 + (n-1)^2$ となっています。つまり、 $\sum_{k=1}^{n-1} k^2$ と等しくなっているよね。

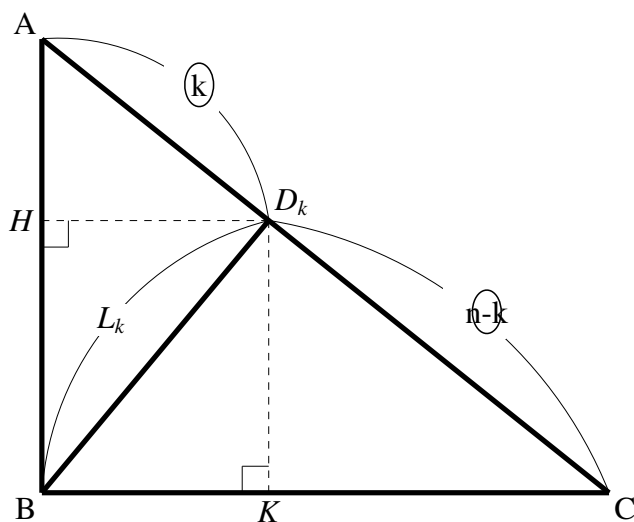
よく、こういった問題を解説すると「言われたら分かるけど、こんなのなかなか思いつきません」なんて言う人がいます。確かに初見では難しいですよ。数学ってこういった問題が多いんです。いろいろな問題に触れて、解法を頭に入れていく。そうすることで、難しい問題も解けるようになってきます。

よく、「考えることが重要だ！」なんて言います。でも、頭の中がからっぽの状態でも思いつくわけじゃないですよ。こつこつと解法のストックを頭の中にためていくことが重要です。

ただ、逆から考えれば「解法のストックさえ、たまっていけば誰でも数学ができるようになる」のだから、ひとつずつ覚えていってもらえばいいだけです。

僕、もともと頭悪かったですけど、こういうことをひとつずつ覚えていけば、かなりできるようになりましたよ。ちょっと自慢です（笑）

【問題 49 の解答】



(1)

点 D_k から辺 AB, BC に垂線をおろし、その垂線の足をそれぞれ H, K とする。

図より、 $D_kH = \frac{k}{n}BC$, $D_kK = \frac{n-k}{n}AB$ が成立。

三平方の定理より、 $(BD_k)^2 = (D_kH)^2 + (D_kK)^2$ がいえる。

$$\begin{aligned} \text{よって、} (L_k)^2 &= (D_kH)^2 + (D_kK)^2 \\ &= \left(\frac{k}{n}BC\right)^2 + \left(\frac{n-k}{n}AB\right)^2 \\ &= \frac{k^2BC^2 + (n-k)^2AB^2}{n^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n-1} (L_k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2BC^2 + (n-k)^2AB^2}{n^2} \\ &= \frac{BC^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \frac{AB^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 \\ &= \frac{BC^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + \frac{AB^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \left(\because \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 = \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \right) \\ &= \frac{AB^2 + BC^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \\ &= \frac{\alpha^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \quad (\because AB^2 + BC^2 = \alpha^2) \\ &= \frac{\alpha^2}{n^2} \cdot \frac{1}{6} n(n-1)(2n-1) \\ &= \frac{(n-1)(2n-1)\alpha^2}{6n} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)(2n-1)\alpha^2}{6n^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)\alpha^2}{6} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot \alpha^2}{6} \\ &= \frac{\alpha^2}{3} \end{aligned}$$

問題50 (B) 教科書

n を自然数とする。白玉4個と赤玉8個が入っている袋から、玉を1個取り出し、色を見てからもとにもどす試行を n 回繰り返すとき、白玉が偶数回出る確率を p_n とする。ただし、0は偶数と考える。

- (1) p_{n+1} を p_n で表せ。
- (2) 数列 $\{p_n\}$ の一般項を求めよ。
- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n$ を求めよ。

(日本女子大学)

【問題50の解説】

確率と漸化式の融合問題で、確率漸化式の問題なんて呼ばれています。このタイプの問題は、意外に簡単なものが多いです。丁寧に、立式さえすれば後は、ホントに簡単な漸化式になるということが圧倒的に多いです。

確率漸化式は、特に対策をしなくても解けるかもしれません。ただ、入試によく出てくるので2問ほど解いてもらいます。

ちょっとした小話です。大学受験に出てくる数学の問題って、流行があるみたいなんです。

「ちょっとふざけた話に聞こえますよね」でも、実際「このタイプの問題昔はよく出たよね」とか「今、このタイプの問題はよく出題される」なんてこともあります。

で、この確率漸化式の問題ってどうも最近の入試ではよく出ているみたいなんです。過去問の勉強をするのもいいですが、大昔と今では出題範囲が一緒でもできやすい問題が変わってくるということがあります。あまりに古いものを勉強するより、似たような問題を出題する他大学の過去問を勉強するのもひとつの手です。

ただ、伝統ある大学は流行にのらないなんていうところもあります。そういったところを受ける人は、あくまでその大学の過去問をした方がいいかもしれません。

【問題50 (1) の解説】

確率漸化式の問題です。はじめて解く人は難しく感じるかもしれませんが、慣れてくると大丈夫です。解き方を覚えておいてくださいね。

今回は、 n 回試行を繰り返したとき、白玉が偶数回出る確率を p_n としています。これよ

り、自分で p_{n+1} と p_n の漸化式を作ります。

$n+1$ 回試行を繰り返したとき、白玉が偶数回出るのは次の 2 通りが考えられます。

(i) n 回目までの試行で白玉が偶数回出て、 $n+1$ 回目の試行で赤玉がでる。

(ii) n 回目までの試行で白玉が奇数回出て、 $n+1$ 回目の試行で白玉がでる。

上記の 2 パターンです。

上で言っていることは分かるかな？分かる人は簡単に分かると思うけど、一応話しておきます。

$n+1$ 回目の試行で白玉が偶数回出るのは、 n 回目の試行で白玉が偶数回出てきているとき、 $n+1$ 回目の試行で白玉が出てしまったら $n+1$ 回目の試行が終わった時点での白玉は奇数回出てしまったことになるよね。だから、 $n+1$ 回目の試行は白玉でない方の赤玉でないといけません。

そして、もう一つの n 回目の試行で白玉が奇数回出ているとき、 $n+1$ 回目の試行で白玉がでないといけません。 n 回目までに白玉が奇数回出ているんだから、 $n+1$ 回目の試行で白が出たら、あわせて白玉が偶数回出たことになるよね。

まず、「(i) n 回目までの試行で白玉が偶数回出て、 $n+1$ 回目の試行で赤玉がでる。」を考えます。

n 回目までの試行で白玉が偶数回出る確率は問題で与えられているとおりの p_n です。また、今回は袋の中に白玉 4 個と赤玉 8 個が入っているので 1 回の試行で白玉、赤玉を取り出す確率はそれぞれ $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $\frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ です。

ですから $n+1$ 回目の試行が赤玉である確率は $\frac{2}{3}$ です。よって今回の事象がおこる確率は $p_n \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} p_n$ です。

次に、「(ii) n 回目までの試行で白玉が奇数回出て、 $n+1$ 回目の試行で白玉がでる。」を考えます。

n 回目までの試行で白玉が奇数回出るの余事象が、白玉が偶数回出るつまり p_n なので、今回の n 回目までの試行で白玉が奇数回出る確率は $1 - p_n$ です。

$n+1$ 回目の試行で白玉が出る確率は $\frac{1}{3}$ です。よって今回の事象がおこる確率は $\frac{1}{3}(1 - p_n)$ です。

上記の、(i),(ii) は背反（2つの事象が同時に起こることはない）なので単純に足してもらったらOKです。

【問題50の解答】

(1)

$n+1$ 回試行を繰り返したとき、白玉が偶数回出るのは次の2通りが考えられる。

(i) n 回目までの試行で白玉が偶数回出て、 $n+1$ 回目の試行で赤玉がでる。

(ii) n 回目までの試行で白玉が奇数回出て、 $n+1$ 回目の試行で白玉がでる。

(i) のとき

確率は $\frac{2}{3}p_n$ となる。

(ii) のとき

確率は $\frac{1}{3}(1 - p_n)$ となる。

よって、 $p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{3}(1 - p_n) = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$

$$\therefore p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}$$

(2)

p_1 となる確率は、1回目の試行で赤玉を取り出す確率より $p_1 = \frac{2}{3}$ である。

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3} \cdots \textcircled{1}$$

特性方程式より、 $\alpha = \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{3}$ を解くと、 $\alpha = \frac{1}{2}$ となる。

これより、①は $p_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}\left(p_n - \frac{1}{2}\right)$ と変形できる。

数列 $\left\{p_n - \frac{1}{2}\right\}$ は初項 $p_1 - \frac{1}{2} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列となる。

$$a_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

$$\therefore a_n = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2}$$

(3)

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 0$ となる。

よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} + \frac{1}{2} \right\} = \frac{1}{2}$

問題 5 1 (B or C)

$\triangle ABC$ の頂点を移動する点 P があり、はじめ頂点 A にいる。その後、1 秒後に、以下の規則に従ってその位置を変化させる。

(A) 頂点 A にいるときは、確率 $\frac{1}{2}$ で頂点 B に移るか、確率 $\frac{1}{2}$ で頂点 C に移る。

(B) 頂点 B にいるときは、確率 $\frac{1}{2}$ で頂点 A に移るか、確率 $\frac{1}{4}$ で頂点 B にとどまるか、確率 $\frac{1}{4}$ で頂点 C に移る。

(C) 頂点 C にいるときは、確率 $\frac{1}{2}$ で頂点 A に移るか、確率 $\frac{1}{4}$ で頂点 B へ移るか、確率 $\frac{1}{4}$ で頂点 C にとどまる。

はじめ頂点 A にいた点 P が n 秒後に頂点 A 、頂点 B にいる確率をそれぞれ p_n, q_n とする。以下の問いに答えよ。

- (1) p_1, q_1, p_2, q_2 を求めよ。
- (2) p_{n+1}, q_{n+1} をそれぞれ p_n の式で表せ。
- (3) p_n, q_n をそれぞれ n の式で表せ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n, \lim_{n \rightarrow \infty} q_n$ をそれぞれ求めよ。

(愛知県立大学)

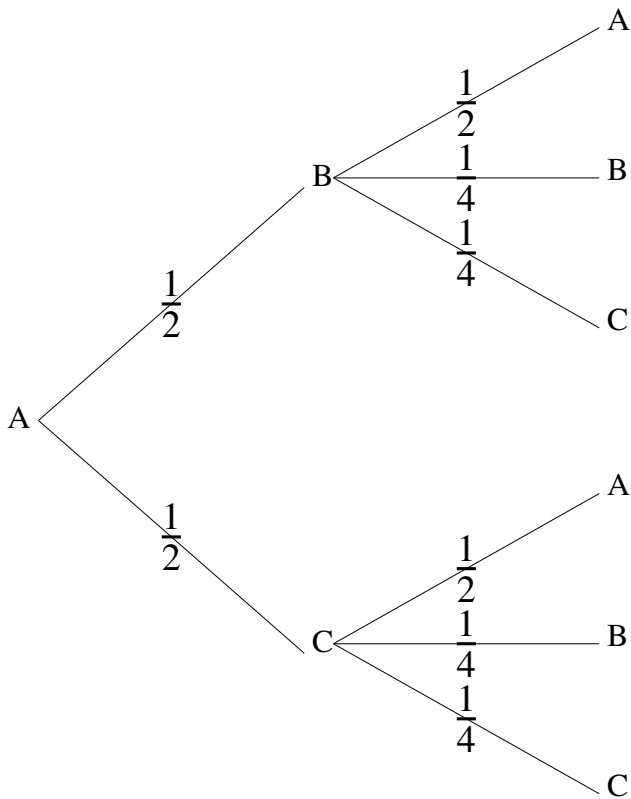
【問題 5 1 の解説】

今回の問題も、問題 5 0 と同じく確率漸化式です。問題 5 0 に比べて少しややこしいですが、同じようにすれば解くことができます。確率漸化式は頻出ですので、しっかりと解けるようになっておいてください。

【問題 5 1 (1) の解説】

まず、初め頂点 A にいました 1 秒後には、確率 $\frac{1}{2}$ の確率で頂点 B か頂点 C に移ります。当然頂点 A にいる確率は 0 です。答えの確率が 0 なんてきたら少しドキッとしますが、たまに出てくることもあります。自信をもって答えるようにしておいてくださいね (僕なんかも、いまだにドキッとします (小心者でごめんなさい...))

次に、2 回目です。



樹形図は上図ようになります。

2秒後に頂点Aにいるのは $A \rightarrow B \rightarrow A$ または $A \rightarrow C \rightarrow A$ のいずれかで、それぞれ確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ となります。よって2秒後に頂点Aにいる確率は $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ です。

2秒後に頂点Bにいるのは $A \rightarrow B \rightarrow B$ または $A \rightarrow C \rightarrow B$ のいずれかで、それぞれ確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ 、 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ となります。よって2秒後に頂点Bにいる確率は $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ です。

【問題51(1)の解答】

1秒後には、頂点Bにいる確率は $\frac{1}{2}$ 、頂点Cにいる確率は $\frac{1}{2}$ となるので、 $p_1 = 0$ 、 $q_1 = \frac{1}{2}$

また、2秒後にAにいるのは $A \rightarrow B \rightarrow A$ または $A \rightarrow C \rightarrow A$ のいずれかで、それぞれ確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ 、 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ となる。よって2秒後に頂点Aにいる確率 p_2 は

$$p_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \text{ です。}$$

2秒後に頂点 B にいるのは $A \rightarrow B \rightarrow B$ または $A \rightarrow C \rightarrow B$ のいずれかで、それぞれ確率は $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ 、 $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ となります。よって2秒後に頂点 B にいる確率 q_2 は $q_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ となる。

【問題5 1 (2) の解説】

$n+1$ 秒後に A にいるのは、 n 秒後に B にいて $n+1$ 秒後に A にいる場合、 n 秒後に C にいて $n+1$ 秒後に A にいる場合のいずれかです。

n 秒後に A にいる場合、 $n+1$ 秒後には B か C にいくので n 秒後 A にいて、 $n+1$ 秒後に A にいることはあり得ません。

また、 C にいる確率を r_n とでもします。 n 秒後には、 A か B か C のいずれかの頂点にいます。よって、 $p_n + q_n + r_n = 1$ より、 $r_n = 1 - p_n - q_n$ です。

このことより、 $n+1$ 秒後 A にいる確率 p_{n+1} は、 $p_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}(1 - p_n - q_n)$ です。

また $n+1$ 秒後に B にいるのは、 n 秒後に A にいて $n+1$ 秒後に B にいる場合、 n 秒後に B にいて $n+1$ 秒後に B にいる場合、 n 秒後に C にいて $n+1$ 秒後に B にいる場合の3パターンです。

このことより、 $n+1$ 秒後に B にいる確率 q_{n+1} は、 $q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}(1 - p_n - q_n)$ となります。

【問題5 1 (2) の解答】

$n+1$ 秒後に A にいるのは、 n 秒後に B にいて $n+1$ 秒後に A にいる場合、 n 秒後に C にいて $n+1$ 秒後に A にいる場合のいずれかである。

$n+1$ 秒後 A にいる確率 p_{n+1} は、

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}(1 - p_n - q_n) = 1 \Leftrightarrow p_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n \text{ となる。}$$

$n+1$ 秒後に B にいるのは、 n 秒後に A にいて $n+1$ 秒後に B にいる場合、 n 秒後に B にいて $n+1$ 秒後に B にいる場合、 n 秒後に C にいて $n+1$ 秒後に B にいる場合の 3 パターンである。

$$n+1 \text{ 秒後に } B \text{ にいる確率 } q_{n+1} \text{ は、} q_{n+1} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}q_n + \frac{1}{4}(1 - p_n - q_n) \Leftrightarrow q_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p_n \text{ となる。}$$

$$\therefore p_{n+1} = -\frac{1}{2}p_n + \frac{1}{2}, \quad q_{n+1} = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{4}$$

【問題 5 1 (3) の解答】

$$(2) \text{ より、} p_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}p_n \cdots \textcircled{1}$$

特性方程式 $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\alpha$ を解くと、 $\alpha = \frac{1}{3}$ となる。

よって $\textcircled{1}$ は、 $p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right)$ と変形できる。

数列 $\left\{p_n - \frac{1}{3}\right\}$ は、初項 $p_1 - \frac{1}{3} = 0 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$ 、公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列より、

$$p_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ となる。}$$

$$\text{よって、} p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ を (2) で求めた式の、 $q_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p_n$ に代入する。

$$\begin{aligned}
q_{n+1} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}p_n \\
&= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \dots \textcircled{2}
\end{aligned}$$

②は $n \geq 1$ で成り立つ。

②を n を $n-1$ で置き換えると、 $q_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ($n \geq 2$)となる。

↑ $n \geq 1$ で成り立つ式のところで、 n を $n-1$ に置き換えたとき $n \geq 1$ は $n-1 \geq 1$ つまり $n \geq 2$ です。 n を置き換えてもいいけど、範囲が変わってくることに注意してくださいね。

$q_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ は $n=1$ のとき、 $q_1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$ となる。

よって、 $q_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ は $n=1$ のときも成立する。

以上より、 $p_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $q_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n$

【問題51(4)の解答】

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0 \text{ より}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right\} = \frac{1}{3}, \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right\} = \frac{1}{3} \text{ となる。}$$