問題５（Ｂ） 教科書

第 n 項が $\sqrt{(n-1)(2n-1)}+kn$ である数列 $\{a_n\}$ が収束するように定数 k の値を定めよ。また、極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

【問題５の解説】

問題を見た瞬間に、「ルートが含まれているから有理化ね！」と考えた人は、ちょっとまってください。

ルートを含んだ極限で有理化をするときは、不定形のときだけだったよね。

$k>0$ のとき、$\lim_{n\to\infty}\sqrt{(n-1)(2n-1)}=\infty,\ \lim_{n\to\infty} kn=\infty$ より、
$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n-1)(2n-1)}+kn\}=\infty$ になってしまうよね。

また、$k=0$ のときは、$kn=0$ より $\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n-1)(2n-1)}+kn\}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{(n-1)(2n-1)}$ より、これも正の無限大に発散してしまいます。

この問題は、収束するには $k<0$ である必要があります。

$k<0$ ということが分かりました。このとき、ルートを含んだ極限で不定形のときだから、有理化をしていきます。

$$\sqrt{(n-1)(2n-1)}+kn$$
$$=\left\{\sqrt{(n-1)(2n-1)}+kn\right\}\cdot\frac{\sqrt{(n-1)(2n-1)}-kn}{\sqrt{(n-1)(2n-1)}-kn}$$ ◀ 有理化をした！
$$=\frac{(n-1)(2n-1)-k^2n^2}{\sqrt{(n-1)(2n-1)}-kn}$$
$$=\frac{(2-k^2)n^2-3n+1}{\sqrt{(n-1)(2n-1)}-kn}$$

とりあえず、有理化でここまできたけど、ここからは次のことを覚えておいてください。

分数の極限の収束と発散

$\lim_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$ で、

(i) (b_nの次数) > (a_nの次数) のとき、∞ または $-\infty$ に発散する

(ii) (b_nの次数) = (a_nの次数) のとき、$\dfrac{(b_n\text{の最高次数の係数})}{(a_n\text{の最高次数の係数})}$ に収束する

(iii) (b_nの次数) < (a_nの次数) のとき、0 に収束する

このことは、少し考えたら分かるよね。まず、(i) のときだけど、分母よりも分子の方が次数が高ければ、分子の方が大きくなるスピードが速いよね（係数がマイナスのときは、小さくなるスピードが速い）。だから、$\pm\infty$ に発散します。

次に (ii) のときです。例えば $\lim_{n\to\infty}\dfrac{3n^3+5n^2+3n+1}{2n^3+3n^2+6n+9}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{3+\dfrac{5}{n}+\dfrac{3}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}}{2+\dfrac{3}{n}+\dfrac{9}{n^2}+\dfrac{9}{n^3}}=\dfrac{3}{2}$ です。

これを見てもらっても分かると思うけど、極限値は、最高次の係数のみによってきまります。

最後に、（iii）の場合だけど、分子よりも分母の次数が高いということは分母の方が分子よりもはるかに大きくなります（係数がマイナスのときは、はるかに小さくなります）そんなときは、0 に収束してくれるよね。

このことは、よく出てくるので覚えておいてください。それでは、問題に戻ります。

$\dfrac{(2-k^2)n^2-3n+1}{\sqrt{(n-1)(2n-1)}-kn}$ は、分母はたかだか 1 次式（ルートなので 1 次式とは言いませんが、ルートの中身の 2 乗は、スピードで考えれば 1 次式と同じです。この考えは、何度も出てきているのでもう大丈夫だよね）です。ということは、収束してくれるためには、分子が 1 次式（あるいは定数）でないといけません。

今回の場合、分子は $(2-k^2)n^2-3n+1$ です。これが 1 次式となるためには $2-k^2=0$ が言えます。ここで、これより、$k=\pm\sqrt{2}$ となりますが、$k<0$ より、$k=-\sqrt{2}$ となります。

ここからは、これまで解いてきたルートを含んだ極限と同じ問題なので、解けると思います。それでは、解答に進みます。

【問題５の解答】

数列 $\{a_n\}$ が収束するには $k < 0$ が必要。

$$\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n-1)(2n-1)}+kn\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\{\sqrt{(n-1)(2n-1)}+kn\}\cdot\frac{\sqrt{(n-1)(2n-1)}-kn}{\sqrt{(n-1)(2n-1)}-kn}$$ ◀ 有理化をした！

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2n-1)-k^2n^2}{\sqrt{(n-1)(2n-1)}-kn}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2-k^2)n^2-3n+1}{\sqrt{(n-1)(2n-1)}-kn}$$

収束するので、$2-k^2=0$ がいえる。また、$k<0$ であるので $k=-\sqrt{2}$

以下 $k=-\sqrt{2}$ のときを考える。

$$\lim_{n\to\infty}a_n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3n+1}{\sqrt{(n-1)(2n-1)}+\sqrt{2}n}$$ ◀ $\dfrac{(2-k^2)n^2-3n+1}{\sqrt{(n-1)(2n-1)}-kn}$ に $k=-\sqrt{2}$ を代入した

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{-3+\frac{1}{n}}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)}+\sqrt{2}}$$ ◀ 分母分子を、分母の最高次の n で割った。

$$=\frac{-3+0}{\sqrt{(1-0)(2-0)}+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{-3}{2\sqrt{2}}$$

$$=-\frac{3}{4}\sqrt{2}$$

以上より、$\boldsymbol{k=-\sqrt{2},\ \lim_{n\to\infty}a_n=-\frac{3}{4}\sqrt{2}}$

少し、テクニック的な話をします。これって、あまり話している人はいないんですけど、パワフルな考えです。それは …

＊数学の答えは多くの場合ひとつです。答えが複数個出てきたときは、より丁寧に条件を見返すこと！

数学の答えって多くの場合、１個になります。２個答えが出てきたとき、もちろん２個とも答えになることもなくはないんですけど、２個とも答えになることは圧倒的に少ないんです。

まあ、ドヤ顔で『これってパワフルだぜ！』なんて言うと、数学のできる人からは「こんな考え、まったく論理的でないよ」なんて言われそうですけど、結構役に立つことは事実ですよ。

この問題も、最初の $k < 0$ を忘れていたとしても、「２個とも答えになることは少ない」ということを知っていれば、$k = \sqrt{2}$ という間違えた答えを削除することができます。

数学の問題を解くときに、必要条件で解いたときは必ず十分性を確認しないといけません。分かってはいるんですけど、そうは言っても必要条件だけで解いたかどうか分からなくなることありますよね（ホントはダメなんですけどね …）。そんなとき、この「答えは１個になることが多い」ということを知っていれば、間違いに気づくことができます。

【例えば、こんな例があります】

問題：方程式 $\sqrt{x+1} = x - 1$ を解け。

ルートが入っているから、考えにくい。とりあえず２乗しようか。ということで２乗します。

$$\sqrt{x+1} = x-1$$
$\Leftrightarrow x+1 = (x-1)^2$ ◀ 両辺を 2 乗した

$\Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$

$\Leftrightarrow x(x-3) = 0$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{x = 0}$ **または** $\mathbf{3}$

これって典型的な誤答例なんだ。どこが間違っているか分かる？実は 1 行目から 2 行目の $\sqrt{x+1} = x-1 \Leftrightarrow x+1 = (x-1)^2$ が間違っています。

$\sqrt{x+1} = x-1 \Rightarrow x+1 = (x-1)^2$ は真だけど、$x+1 = (x-1)^2 \Rightarrow \sqrt{x+1} = x-1$ は真ではありません。ここで、同値性が崩れています。だって、$x+1 = (x-1)^2$ のとき、$x-1 = -\sqrt{x-1}$ のときも考えられるもんね。

数学 III をやっている人にとっては簡単すぎる例えだったかもしれません。ですが、もし仮に同値変形を間違えて、「x=0,3」と答えが 2 つ出てきたとします。

そんな、場合でも「2 個答えとなることは少ない」ということを知っていればもう一度確認することができます。で元の $\sqrt{x+1} = x-1$ に代入してもらえば、$x = 0$ は不適で $x = 3$ が適するということが分かると思います。

PS
今回は、強調のためにあえて同値変形の記号（⇔）を書きました。ですが、通常の答案には、証明など強調したいときを除いて (⇒) なんかも含めて書かない方がいいですよ。

もちろん書いてもらってもいいのですが、当たり前ですけど同値でないときに、同値（⇔）を書いていれば減点されます。同値っていうことは常に意識しておかないといけないんですけど、どうしても間違えちゃうことがあります。

そんなとき、矢印の記号を何も書いていなければ減点されませんが、矢印の記号を書いていれば減点されてしまいます。繰り返しになりますが、必要条件や同値の記号は証明などで、強調したいときにのみ使うようにしたらいいですよ。