

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

単元：数学Ⅰの数と式      難易度：基礎

\*難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

次の式を因数分解せよ。

(1)  $a^2b + a^2 - b - 1$       (2)  $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 2$       (3)  $a^4 + a^2 + 1$

### 【解説】

因数分解の問題です。因数分解については、以下のページで詳しく解説してあります。もし、不安な人はコチラのページで勉強をしておいてください。

全部で5つのプリントがありますが、この5つのプリントができれば因数分解は完璧ですよ。

因数分解（その1）<https://www.hmg-gen.com/insuu1.pdf>

因数分解（その2）<https://www.hmg-gen.com/insuu2.pdf>

因数分解（その3）<https://www.hmg-gen.com/insuu3.pdf>

因数分解（その4）<https://www.hmg-gen.com/insuu4.pdf>

因数分解（その5）<https://www.hmg-gen.com/insuu5.pdf>

## 因数分解の解法

(I) 公式を使えるものは公式を適用する。

(II) 共通因数があるときは共通因数でくくりだす。

→係数が同じもの同士をくくるとうまくいく場合が多い。

$$\text{ex } x^2 + 2x - y^2 - 2y$$

$$=x^2 - y^2 + 2(x - y) \quad \blacktriangleleft \text{ とりあえず係数の同じもの同士をペアにした}$$

$$=(x + y)(x - y) + 2(x - y) \quad \blacktriangleleft x - y \text{ という共通因数ができた}$$

$$=(x - y)\{(x + y) + 2\} \quad \blacktriangleleft \text{ 共通因数 } (x - y) \text{ でくくりだした}$$

$$=(x - y)(x + y + 2)$$

(III) (I)(II) でできないときは、最低次の文字で整理する。

(i) 最低次の文字の次数が1のとき、最低次の文字で整理したあと、共通因数でくくりだす。

(注) 最低次の文字が1次のときは必ず共通因数がでてきます。(←そうでないと因数分解ができない！必ず共通因数ができるのでなんとかして共通因数を見つけだすこと)

(ii) 最低次の文字の次数が2のとき、最低次の文字で整理したあとたすきがけをつかって因数分解する。

(注) 最低次の文字の次数が3以上のときは、最低次の文字で整理してもうまくいかないことが多いです。最低次の文字の次数が3以上の時は(I)の公式を適用するか、(II)の共通因数でくくりだすパターンが多いです。

(IV) 上記の方法でできないときは必ず  $( )^2 - ( )^2$  になってくれているので、

$$A^2 - B^2 = (A - B)(A + B) \text{ の公式を使って因数分解をする。}$$

因数分解については、上記の解法を覚えておいてください。これだけ、覚えておけば因数分解だったらどんな問題でも解けてしまいますよ。

因数分解が不安だ、という人は上記の5つのプリントをみておいてください。

### 【(1) の解説】

$a^2b + a^2 - b - 1$  です。これは、因数分解の公式も使えそうにないし、共通因数もなさそうだよな。

だから、解法(III)の最低次の文字で整理する解き方で解いていきます。今回の場合、 $a$ に着目すると2次、 $b$ に着目すると1次。

だから、最低次の  $b$  で整理していきます。で、実際やってみたらわかると思うけど、最低次の文字の次数が1次のとき、最低次の文字で整理したら、共通因数ができるんだっただよね（そうじゃないと因数分解できない！）。

今回の問題だったら、単純なので共通因数を簡単に見つけることができます。ですが、難しい問題だと共通因数がなかなか見つからないこともあります。そんなときでも、「共通因数は絶対にあるんだ」と念頭にいれて式を見ていけば、難しくても見つけることができますよ。

### 【(1) の解答】

$$a^2b + a^2 - b - 1$$

$$=(a^2 - 1)b + (a^2 - 1) \leftarrow \text{最低次数の } b \text{ で整理した！すると、共通因数の } a^2 - 1 \text{ ができた！}$$

$$=(a^2 - 1)(b + 1) \leftarrow \text{共通因数の } a^2 - 1 \text{ でくくった！}$$

$$=(a + 1)(a - 1)(b + 1)$$

#### 【注】

上記の解は、 $(a^2 - 1)(b + 1)$  で止めてしまっただめですよ。 $a^2 - 1$  はまだ因数分解できます。因数分解できるときは、できるだけ因数分解をしておかないと減点されますよ。

たまに、「どこまで因数分解するのですか？」と質問をうけることがあります。何も指示がない場合、係数が有理数の状態でやめます。ルートまでする必要はないです。

例えば、 $x^2 - 4$  は  $(x + 2)(x - 2)$  と因数分解しないとダメですが、 $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$  まで因数分解をする必要はないですよ。

ただ、問題によっては「実数の範囲」と指示されることもあります。ルートは無理数です。無理数は実数なので、この指示がある場合ルートを含んだところまで因数分解しないといけません。ちょっと細かいけど、覚えておいてくださいね。

### 【(2) の解説】

(2) も (1) 同様、公式は使えないし、共通因数もなさそうだよ。だから、解法(III)の最低次の文字で整理していきます。

今回は、 $x$ は2次、 $y$ も2次、この場合どっちで整理してもいいですよ。今回は $x$ で整理することにします。

\*最低次が2次のものが複数あるとき、2乗の係数の簡単そうな方で整理したら計算が少しくなります。今回の場合、 $x$ も $y$ も2乗の係数は1です。だから、どっちで整理してもいいです。アルファベット順で、 $x$ で整理することにします。

まあ、違う方でやったとしても多少計算が複雑になる程度です。そこまで、気にしないでいいですよ。

## 【(2) の解答】

$$\begin{aligned} & x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 2 \\ = & x^2 + (2y - 1)x + y^2 - y - 2 \quad \leftarrow \text{最低次の } x \text{ で整理した！} \\ = & x^2 + (2y - 1)x + (y + 1)(y - 2) \quad \leftarrow \text{定数項の } y^2 - y - 2 \text{ を因数分解した} \end{aligned}$$

\*最低次が2次のとき、定数項のみで因数分解できるということがほとんどですよ。

$$\begin{aligned} = & \{x + (y + 1)\} \{x + (y - 2)\} \quad \leftarrow \text{たすきがけ（下記参照）を使って因数分解をした！} \\ = & (x + y + 1)(x + y - 2) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 1 \quad \times \quad y + 1 \longrightarrow y + 1 \\ 1 \quad \times \quad y - 2 \longrightarrow y - 2 \\ \hline 1 \quad \quad (y + 1)(y - 2) \quad 2y - 1 \end{array}$$

## 【注】

この問題は、次のように解いた方が簡単だと思います。

でも、なぜメンドウな解き方をしたのかと言うと、「最低次の文字で整理する解法で必ず解ける!」ということ覚えておいて欲しいからです。

「問題集で因数分解の問題を解いた。問題集の答えを見ると、共通因数で解いていた。でも、自分は共通因数を見つけられなかった!気づけなかった(涙)」気づけない私は能力がないのでは?なんて落ち込む人がいます。

「そんなことで落ち込むなんて…」と思う人もいると思います。でも、落ち込んだり人いるんです。

でも、そんなこと関係ないですよ。僕、いまだにカッコ悪い解法で解くことも度々です。授業の途中で気づいて、生徒さんにバレないように板書を消すことも!! (笑顔)

だから、多少気づけなくても気にしなくていいですよ。こんなの慣れていけば自然と気づけるようになります。また、多少メンドウであったとしても、問題が解けたら大学受験に合格ですよ。そんなこと気にせずに、どんどん進めていってくださいね。

## 【(2) の別解】

\*左側の3項の  $x^2 + 2xy + y^2$  が  $(x+y)^2$  と因数分解できるよね。次の2項も  $-x-y = -(x+y)$  とできるので与式が  $x+y$  のみになってくれます。

$x+y = A$  とでも置換して解いていけばいいですよ。もちろん、慣れている人は置換せずに解いてもらっても OK です。

ただ、繰り返しになるけど、気づけなくても気にする必要ないですよ。こういうタイプの因数分解は最低次で整理したら、絶対に解けるのですから、気にしない!

$$\begin{aligned} & x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 2 \\ & = (x+y)^2 - (x+y) - 2 \quad \leftarrow x+y \text{ のみの式になった!} \\ & = A^2 - A - 2 \quad \leftarrow x+y = A \text{ と置換した!} \\ & = (A+1)(A-2) \\ & = (x+y+1)(x+y-2) \end{aligned}$$

## 【(3) の解説】

$x^4 + x^2 + 1$  は、共通因数もないし、公式もないし、最低次の文字で整理してもうまくいきそうにないよね。

そもそも今回は、もう  $x$  で整理されています。あと、豆知識なんだけど、「一般的に因数分解で最低次の文字で整理するのは、最低次が1次または2次のときだけ」です。

たまに、3次以上のときも整理することもあるけど、「なんか式変形の仕様がないな…最低次が3次以上だけど、式変形がこれくらいしか思いつかないから、最低次の文字で整理してみようかな?」とその程度です。

問題に戻ります。だから、今回の問題は、これまでの因数分解の知識では解けそうにないんだよね。こんなとき、 $(\quad)^2 - (\quad)^2$ の形になって因数分解をします。

このタイプの因数分解はちょっと気づきにくいこともあります。でも、頑張っ覚えてくださいね。

$x^4 + x^2 + 1$ で、まず強引に2乗の形をつくります。前半の $x^4 + x^2$ だけで2乗を作ると、 $(x^2 + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}$ と分数が出てきます。ないことはないけど、因数分解で分数が出てくることは少ないので優先度としては低いです。

そこで、2乗して $x^4 + 1$ が出てくるものを作ります。これは、 $(x^2 - 1)^2$ と $(x^2 + 1)^2$ が考えられます。

今回は、 $(x^2 + 1)^2$ の方を使うんだけど、なぜうまくいかないかということを確認するために $(x^2 - 1)^2$ の方でやってみることにするね。

$x^4 + 1 = (x^2 - 1)^2 + 2x^2$ という等式が成立するよね。単に右辺の $(x^2 + 1)^2$ を展開して整理すると、左辺と一致してくれる、ただ、それだけですよ。

$$\begin{aligned} & x^4 + x^2 + 1 \\ & = (x^2 - 1)^2 + 2x^2 + x^2 \quad \blacktriangleleft (x^2 - 1)^2 + 2x^2 \text{ より !} \\ & = (x^2 - 1)^2 + 3x^2 \end{aligned}$$

とりあえず、式変形してみたけど、これでは $(\quad)^2 - (\quad)^2$ の形になっていないよね。仕方がないから、もうひとつの方で解いていきます。

\*今回の因数分解に限らず数学ってこういうふうにすること多いです。とりあえず、問題を解いてみます。それで解けたらOK。で、できなかつたらその時点でまた別の解法で解いていきます。もちろん、問題にもよりますが、問題を解く前から解法が思いついている訳ではないことが多いですよ。

「できそうだからやってみる」この感覚重要です。

### 【(3) の解答】

$$\begin{aligned} & x^4 + x^2 + 1 \\ & = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 + x^2 \leftarrow (x^2 + 1)^2 - 2x^2 \text{ より！} \\ & = (x^2 + 1)^2 - x^2 \leftarrow ( \quad )^2 - ( \quad )^2 \text{ の形になった！} \\ & = \{(x^2 + 1) + x\} \{(x^2 + 1) - x\} \\ & = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \end{aligned}$$

これで、今回の解説プリントは終わりです。もし、因数分解が不十分だな、と思えるのなら冒頭で紹介した5つのプリントを頑張ってくださいね。これだけで、因数分解は完璧ですよ。それでは、頑張ってください。

### 【無料で読めるメルマガの紹介】

---

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！  
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



---

ツイッターやっています  
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法  
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法  
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）  
[magdai@hmg-gen.com](mailto:magdai@hmg-gen.com)

河見賢司