「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

$abc \neq 0,\ a+b+c=0$ のとき、$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ の値を２通りの解法で解け

【ひとつめの解法の解説】

この問題を見てすぐに思い出して欲しいことは、以下の通りです。

数学の決まりごと

数学では、文字の種類が多ければ多いほどとにかく大変！そこで、文字の種類を減らせるときは何よりもまず文字の数を減らしてから考える

この決まりごとから考えると、求める式の $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ は文字の種類は a, b, c の３つだよね。

でも、$a+b+c=0$っていう条件を $c=-a-b$ と変形をして $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ に代入をしたら、とりあえず文字は a, b, c の３つから c が消去されて a, b の２つになります。文字の数が３つから２つに減ったので考えやすくなります。

よくこういうふうにするというと「そう式変形をしたらうまくいく根拠ってあるんですか？」なんて言われることがあります。でも、根拠なんてありません。なぜだか知りませんが「数学は文字の種類を減らせばうまくいくようになっています」。とりあえず「そういうものだ」と納得しておいてくださいね。

それでは、これを使って問題を解いていこうと思います。文字消去するだけで、解けてしまうということが実感できると思いますよ。

【ひとつめの解法の解答】

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{-a-b}\right)+b\left(\frac{1}{-a-b}+\frac{1}{a}\right)+(-a-b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$ ◀ $c=-a-b$ を代入した

$$=a\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a+b}\right)+b\left(-\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a}\right)-(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

$$=\cancel{\frac{a}{b}}-\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a+b}+\cancel{\frac{b}{a}}-1-\cancel{\frac{a}{b}}-\cancel{\frac{b}{a}}-1$$

$$=-\frac{\cancel{a+b}}{\cancel{a+b}}-2$$

$=\mathbf{-3}$ ◀ これが答え

少し計算が面倒だったかもしれませんが、これで解けるということが分かったと思います。繰り返しになりますが、次のことを覚えておいてください。

「＊数学で文字の数を減らせるときは、何よりもまず文字の数を減らしてから考える」

【ふたつめの解法の解説】

ひとつめの解法で「数学で文字の種類を減らせるときは何よりもまず文字消去」ということを覚えてもらいました。

先ほど解説したような解法で解いてもらってもいいのですが、今回の条件式は $a+b+c=0$ です。このように $a+b+c=$ (一定) のときは、以下のように解く方法もあります。意外に良く出てくる手法なのでしっかりと理解しておいてください。

$a+b+c=$ (一定) の扱い方

$a+b+c=$ (一定) という条件が出てきたときは、$a+b=$ (一定) $-c$, $b+c=$ (一定) $-a$, $c+a=$ (一定) $-b$ とするとうまくいくことが多い！

今回も $a+b+c=0$ という条件が与えられているので、上記を使おうかな？と思います。ただ、この条件を使うためには $a+b$, $b+c$, $c+a$ が必要です。ですから、とりあえず $a+b$, $b+c$, $c+a$ を出すことを最初の目的にします。

そこで、$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ をどうゆうふうに式変形をしたら $a+b$, $b+c$, $c+a$ が出るだろう？と考えて、以下のようにすれば出てくることがわかります。

$$
\begin{aligned}
&a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\\
&=a\cdot\frac{b+c}{bc}+b\cdot\frac{c+a}{ac}+c\cdot\frac{a+b}{ab}
\end{aligned}
$$

とりあえず上記のように式変形をしたら $a+b$, $b+c$, $c+a$ が出てきてくれます。そこで $a+b+c=0$ より $a+b=-c$, $b+c=-a$, $c+a=-a$ を代入してみます。

$$
\begin{aligned}
&a\cdot\frac{b+c}{bc}+b\cdot\frac{c+a}{ac}+c\cdot\frac{a+b}{ab}\\
=&a\cdot\frac{-a}{bc}+b\cdot\frac{-b}{ac}+c\cdot\frac{-c}{ab}
\end{aligned}
$$

上記のように式変形できるけど、これではなんとなくうまくいきそうにないよね？当たり前なんだけど、文字の数を減らしたら簡単で見やすい式になることがほとんどです。でも、これでは次数も高くなってしまうし、かえって見にくくなってしまいます。これでは、失敗です。

そこで、上記のように式変形をする以外になんとか $a+b$, $b+c$, $c+a$ を出すことはできないかな？と考えます。$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ を式変形するにはとりあえずカッコを外して展開をするぐらいしかないので、カッコを外して展開をしてみることにします。

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$
$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ ◀ ただ単に展開をした
$=\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)$ ◀ 分数が同じもの同士をペアにした
$=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$ ◀ $a+b,\ b+c,\ c+a$ の形が出てきた！

こういうふうにしたら $a+b,\ b+c,\ c+a$ の形が出てきたけど、これだったらなんだかうまくいきそうだよね。

それでは、解答に進みます。

【ふたつめの解法の解答】

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)+c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$
$=\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}$ ◀ ただ単に展開をした
$=\left(\frac{a}{c}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{a}{b}\right)$ ◀ 分数が同じもの同士をペアにした
$=\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}$ ◀ $a+b,\ b+c,\ c+a$ の形が出てきた！

ここで $a+b+c=0$ より、$a+b=-c,\ b+c=-a,\ c+a=-b$ をそれぞれ代入して

$=\frac{-\cancel{c}}{\cancel{c}}+\frac{-\cancel{a}}{\cancel{a}}+\frac{-\cancel{b}}{\cancel{b}}$
$=-1-1-1$
$=\mathbf{-3}$ ◀ これが答え！

今回の問題はどうだったでしょうか？こういった問題って解き方っていうか考え方さえ覚えておけば解けてしまうよね。数学ってこういう問題が多く、考え方を覚えていれば解けてしまうという問題も多いです。

まずは、こういった数学の考え方をひとつずつ身につけることを優先してください。それでは、がんばってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司