

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

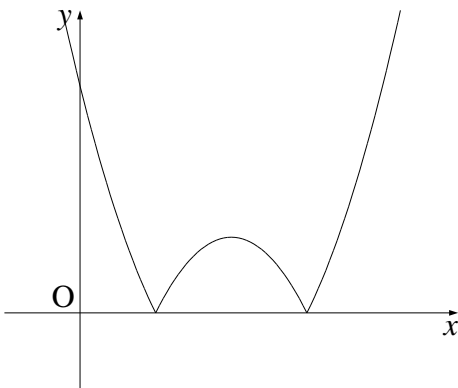
$$f(x) = |x^2 - 4x + 3|$$

$$g(x) = ax \quad (a > 0)$$

とおく。曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = g(x)$ が共有点を4つもつような定数 a の値の範囲を求めよ。

【問題の解説】

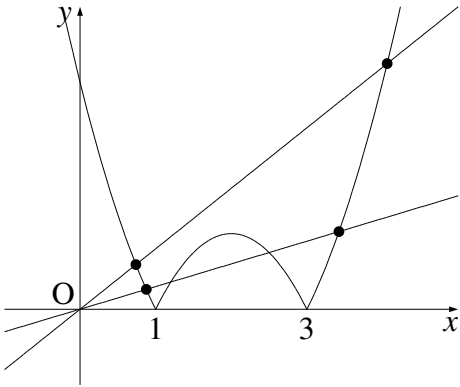
まず、 $y = |x^2 - 4x + 3|$ のグラフをかくと、以下のようになります。



今回は、 $y = ax \quad (a > 0)$ と4交点をもつような a の値の範囲を求めよ、といった問題です。

$y = ax$ っていうのは、原点を通り傾きが a の直線です。そして、今回は $a > 0$ という値の範囲が与えられているので、 $0 < x < 1$ と $3 < x$ で絶対に2つ交点を持ちます。

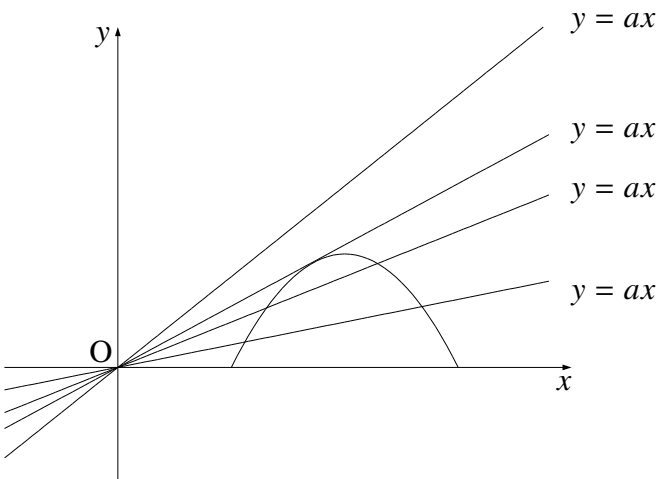
* $0 < x < 1$ と $3 < x$ で絶対に2つ交点を持つということはわかるよね？もし、わからなければ、自分でグラフをかいて確認してもらえば分かると思いますよ。



上図のように、 $y = ax$ で傾きが正のときは a の値がどういったときにでも $0 < x < 1$ の部分と $3 < x$ の部分とで必ず交点を2つ持ってくれます。

今回は、「交点が4つとなるような a の値の範囲を求めよ」です。もうすでに、交点を2つ持ってくれているので、あと2つ交点をもてばOKです。

ここからは、分かると思いますが、後は $1 < x < 3$ の部分で交点を2つ持ってくれたらOKとなります。 $1 < x < 3$ の部分は、 $y = -x^2 + 4x - 3$ です。これと交点を $1 < x < 3$ で2つもてばOKです。どんなときかな？と思うので、少しグラフをかいて考えることとします。



とりあえず、 $y = ax$ をいろいろとかきました。これが、 $y = -x^2 + 4x - 3$ と2つの交点をもてばいいんだけど、それはもう分かるよね。

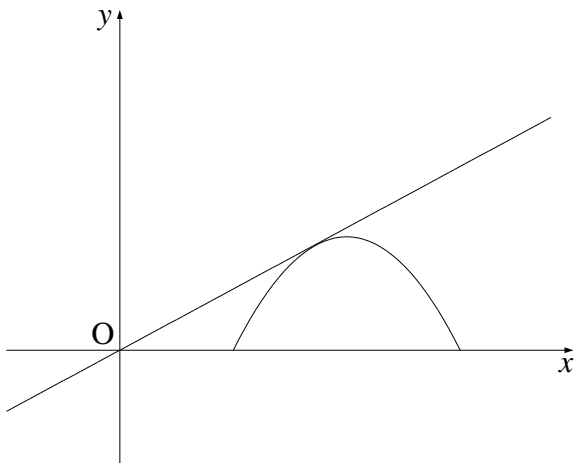
上図より、接するときより傾きが小さいつまり、 a の値が小さいときに2つの交点を持ってくれます。今回は、 $a > 0$ という条件があるので、接するときより a の値が小さい時は必ず2つの交点をもってくれます。

それでは、解答に進みたいと思います。

【問題の解答】

$a > 0$ のとき、 $y = |x^2 - 4x + 3|$ と $y = ax$ は、 $0 < x < 1$ と $3 < x$ で溶融店をひとつずつもつ。

よって、4つの交点をもつときは $y = |x^2 - 4x + 3|$ と $y = ax$ が $1 < x < 3$ で共有点を2つもつときである。



$y = ax$ が $y = -x^2 + 4x - 3$ と接するときより a の値が小さいとき、 $1 < x < 3$ で $y = |x^2 - 4x + 3|$ と $y = ax$ が共有点を2個をもつ。以下、 $y = -x^2 + 4x - 3$ と $y = ax$ が接するときの a の値を求める。

$$-x^2 + 4x - 3 = ax$$

$$x^2 + (a - 4)x + 3 = 0$$

この判別式を D とする。接するときは $D = 0$ となる。

$$D = (a - 4)^2 - 12 = 0$$

$$(a - 4)^2 = 12 \quad \blacktriangleleft \text{展開をするよりも、こうした方が楽}$$

$$a - 4 = \pm 2\sqrt{3}$$

$$a = 4 \pm 2\sqrt{3}$$

$a = 4 - 2\sqrt{3}$ のとき、 $x^2 + (a - 4)x + 3 = 0$ に $a = 4 - 2\sqrt{3}$ を代入すると

$$x^2 - 2\sqrt{3}x + \sqrt{3} = 0$$

$$(x - \sqrt{3}) = 0$$

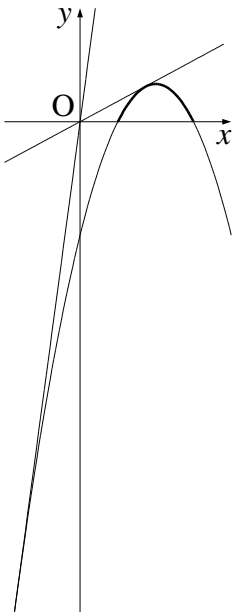
$$x = \sqrt{3}$$

交点の x 座標は、 $x = \sqrt{3}$ で $1 < x < 3$ を満たす

よって、 $a = 4 - 2\sqrt{3}$ のとき、 $1 < x < 3$ で接点をもつ。

以上より、 $y = ax$ が $y = f(x)$ が 4 個の共有点をもつような a の値の範囲は、 $0 < a < 4 - 2\sqrt{3}$ となる。

(注) $y = ax$ と $y = x^2 - 4x + 3$ が接するのは当然 2 つあります。以下の図を見てもらえば分かると思います。今回はより丁寧にするために、わざわざ接点まで求めましたがこのくらいなら明らかとしてもらってもいいかもしれません。ただ、減点されるのが怖いのでより丁寧に書いた方がよいと思います。



↑少し見にくいですが、接線は上記のように 2 通りあります。

今回の問題は、どうでしたか？ 今回の問題は、グラフをかいて視覚的に考えて解いていきました。

ついつい数式のみで解いてしまいたくなります。ですが、数式での解法は計算が大変と

いうことが多いです。

だから、こういった問題を見たときは、まず「視覚的にグラフで考えられないか？」とした上で、無理な場合計算で数式で解くようにしてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司