

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

$a < c < b$ のとき、 x の2次方程式 $(x-a)(x-b) + 3(x-c) = 0$ が異なる2つの実数解をもつことをしめせ。

【解説】

「2次方程式が異なる2つの実数解をもつ」ときている時点で、判別式を使うのかな？と考える人が多いと思います。

でも、判別式を使ってもたぶん解けないよ。解けたとしても、かなり難しい…そもそも、この問題を見た瞬間に判別式を使う以外の解き方で解いていくんだな、と思わないとダメですよ。

もし、判別式を使うだったら $(x-a)(x-b) + 3(x-c) = 0$ を展開して整理して $a'x^2 + b'x + c' = 0$ の形にしないと判別式を使えないよね。でも、そもそもこんなメンドウなことはしそうにない。

だって、 $(x-a)(x-b) + 3(x-c) = 0$ を展開して整理して $a'x^2 + b'x + c' = 0$ の形にして解いていくなんで誰でもできるよね。こんな単にメンドウなだけのことをさせられることは少ないですよ。

だから、「こうやったら解けるけど、これは何かしら他の解き方があるよ」という出題者からのヒントだな、と気づけるようになって欲しいです。

*上記のような考え、まったく数学的でないよ。だって、数学って数学のルールがあって、そのルールに反しない限りどんなことをしても OK です。

展開して整理することは当然、数学のルールに則ったものです。だから、当然そのように変形しても OK ですよ。

でも、大学受験の数学では上記のような「こうやったら解けるけど、メンドウそう…だから他にうまい解法がありそう…」と考えることはとっても重要です。

数学のできる人はこういうことを、無意識のうちになかば当たり前のこととして数学の問題を解いていますよ。だから、あなたもこういったテクニク的な考え方を覚えていってくださいね。意識していれば、誰でも身につきますよ

では、問題に戻るね。 $(x-a)(x-b)+3(x-c)=0$ が異なる2つの実数解をもつことをグラフで考えていくことにするね。左辺を $f(x)$ とすると $f(x)$ は x^2 の係数が1 (← $(x-a)(x-b)+3(x-c)$ を展開したとき x^2 の係数は1です。) で、当然正の値。よって、 $y=f(x)$ は下に凸な放物線となるよね。

下に凸な放物線と x 軸との位置関係は、以下の3つが考えられます。

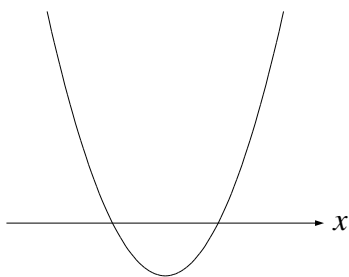


図1 x 軸と異なる2点で交わる

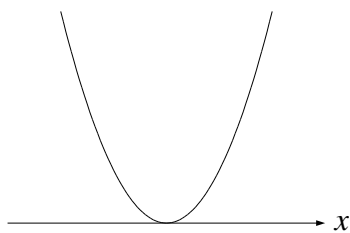


図2 x 軸と接する

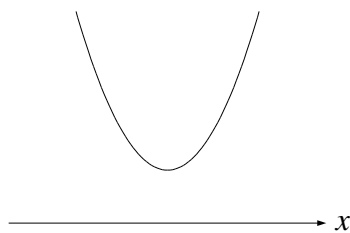


図3 x 軸との交点がない

で、2次方程式 $f(x)=0$ が異なる2つの実数解をもつとき、放物線 $y=f(x)$ は、上図の図1のように x 軸と異なる2点で交わればよいんだよね。

で、もし $f(t) < 0$ となる t が存在したとしたら、放物線 $y = f(x)$ は x 軸と異なる 2 点で交わってくれるよね。

*まあ、分かる人は分かると思うけど、念のため話しておきます。

$f(t) < 0$ となる t が存在するという事は、放物線上で y 座標が負になることがあるということなんだよね。上図、図 1、図 2、図 3 のなかで y 座標が負となることがあるものは、図 1 だけです。

なら、ここからは $f(t) < 0$ をみたすような t を探していけばいいんだよね。でも、 $f(x) = (x - a)(x - b) + 3(x - c)$ から判断して、 $f(t)$ の t にあたる部分は a, b, c の 3 つのうちいずれかだよ。

理由としては、数学は数式が簡単になってくれた方が考えやすいんだよね。で、 x に a を代入すると $(x - a)(x - b) = 0$ となりかなり、 $f(a)$ はかなり簡単になってくれます。こういうふうに、簡単になるものを代入するというのが鉄則ですよ。

$f(a) = (a - a)(a - b) + 3(a - c) = 3(a - c)$ となります。 $a < b < c$ より、 $3(a - c) < 0$ となるよね。これで $f(t) < 0$ となる t が存在してくれたらから証明終了です。

ちなみに、 $f(b) = (b - a)(b - b) + 3(b - c) < 0$ なので、これでも示すことができます。

$f(c) = (c - a)(c - b) + 3(c - c) = (c - a)(c - b)$ となります。 $a < b < c$ より、 $c - a > 0, c - b > 0$ です。これより、 $f(c) = (c - a)(c - b) > 0$ となるので、 $f(c)$ では証明できません。

この問題では、 $f(a)$ or $f(b)$ or $f(c)$ を使うということまでは簡単に分かります。ここから、どれを使うかは実際にやってみないとわかりませんよ。こういう問題の考え方をしっかりと理解しておいてください。それでは、解答に進みます。

【解答】

$f(x) = (x - a)(x - b) + 3(x - c)$ とする。

$$f(a) = 3(a - c) < 0 \quad (\because a < b < c)$$

$f(x)$ は x^2 の係数が 1、つまり正であるので放物線 $y = f(x)$ は下に凸である。

$f(a) < 0$ であるので、放物線 $y = f(x)$ は x 軸と異なる 2 点で交わる。

つまり、2 次方程式 $f(x) = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつ。(証明終)

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあつてそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦勞はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4 浪しているのにセンター 6 割」

→ 「わずか入会 8 か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司