「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

連立方程式 $\begin{cases} x^2+y^2=9 & \cdots ① \\ y=x^2+a & \cdots ② \end{cases}$ が異なる４個の実数解の組をもつときの定数 a の値の範囲を求めよ。

【解説】

数学 II を勉強していたら、$x^2+y^2=9$ は円を表すし、$y=x^2+a$ は放物線を表すから、グラフで解いていこうかな？と考える人がいます。

もちろん、それでできないことはないけど、正確な答案を書くのはかなりややこしいです。

だから、純粋に数式から解いていくことにします。この解法だと数学 I のみの知識で解くことができます。

連立方程式の同値変形がでてきます。少しややこしいですが、難しい大学を受ける人はしっかりと理解しておいてくださいね。とっても重要な考え方です。

いきなりですが、以下の同値変形を覚えてください。

重要な同値変形

「$X=0$ かつ $Y=0$」$\Longleftrightarrow$「$aX+bY=0$ かつ $X=0$（ただし a,b は定数で $b \neq 0$）」

その前に同値を知らない人がいるから念のため話しておきます。A と B が同値とは、砕けた表現でいうと数学的に A と B は同じということです。

A と B が同値であるとき、$A \Rightarrow B$ が真かつ $A \Leftarrow B$ が真であるとき、A と B は同値になります。

それでは、今回の「$X=0$ かつ $Y=0$」と「$aX+bY=0$ かつ $X=0$（ただし a,b は定数で $b \neq 0$）」が同値であることを示していきます。

まずは、「$X=0$ かつ $Y=0$」$\Rightarrow$「$aX+bY=0$ かつ $X=0$（ただし a,b は定数で $b \neq 0$）」からです。

でも、これが真ってあきらかだよね。だって、$X=0$ かつ $Y=0$ のとき、$aX+bY=0$ と $X=0$ は当然成立します。だから、「$X=0$ かつ $Y=0$」$\Rightarrow$「$aX+bY=0$ かつ $X=0$（ただし a,b は定数で $b \neq 0$）」は真です。

次に「$X=0$ かつ $Y=0$」$\Leftarrow$「$aX+bY=0$ かつ $X=0$（ただし a,b は定数で $b \neq 0$）」です。

右が成立するとき、必ず左も成立したとしたら上記の命題は真となります。でも、これも少し考えたら明らかですよ。$X=0$ は言えているんだから、$X=0$ を $aX+bY=0$ に代入します。すると $bY=0$ となり、$b \neq 0$ のとき $Y=0$ も成立します。

これより「$X=0$ かつ $Y=0$」$\Leftarrow$「$aX+bY=0$ かつ $X=0$（ただし a,b は定数で $b \neq 0$）」のとき、必ず $X=0$ かつ $Y=0$ も成立します。

よって、「$X=0$ かつ $Y=0$」$\Leftarrow$「$aX+bY=0$ かつ $X=0$（ただし a,b は定数で $b \neq 0$）」も真となります。

これで、両方とも真といえたので、「$X=0$ かつ $Y=0$」と「$aX+bY=0$ かつ $X=0$（ただし a,b は定数で $b \neq 0$）」は同値です。

これを踏まえて上で、今回の問題を解いていくことにするね。

さっきの同値変形を使うには、$X=0$ かつ $Y=0$ と右辺が 0 の形であったら使いやすいので、①, ② とも移項して右辺を 0 にします。

$$\begin{cases} x^2+y^2=9 & \cdots ① \\ y=x^2+a & \cdots ② \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2-9=0 & \cdots ①' \\ x^2-y+a=0 & \cdots ②' \end{cases}$$

ここから、先ほどの同値変形を使っていきます。で、今回の場合 ①′ − ②′ をして x^2 を消去します。

①′ − ②′ = ③ とでもします。そうすると、先ほどの同値変形より {①′, ②′} は {③, ①′} であることと同値です。
⇑{①, ②} と {①′, ②′} は同値です。また、{①′, ②′} と {③, ①′} も同値です。よって、{①, ②} と {, ③, ①′} も同値です。

今回は、{①, ②} が異なる 4 組の実数解をもてばいいんだけど、{①, ②} と {③, ①′} は同値なので、{③, ①′} が異なる 4 組の実数解をもてば OK です。

①′ − ②′ より、$y^2+y-a-9=0\cdots$③ となります。あと、①′ より $x^2=9-y^2$ となります。

で、ここで ③ と ①′ の連立方程式が異なる 4 組の実数解をもてばいいんだよね。ここで $x^2=9-y^2$ の方に着目して欲しんだけど、もし仮に y が存在したとして、その y が $9-y^2<0$ のとき $x^2=9-y^2$ を満たす実数 x は存在しないよね (← x が実数のとき $x^2 \geqq 0$ です。だから、$x^2<0$ つまり $9-y^2<0$ のとき、実数 x は存在しません。)。

また、$x^2=9-y^2$ で $9-y^2=0$ のとき $x^2=9-y^2$ は $x^2=0$ となるので $x=0$ のみが存在します。

最後に $9 - y^2 > 0$ つまり $-3 < y < 3$ のときです。このとき $x^2 = 9 - y^2$ ですが、ひとつの y に対して x はふたつ存在するよね。例えば、$9 - y^2 = 2$ のとき $x^2 = 2$ となり、x は $x = \pm\sqrt{2}$ のプラスマイナスの 2 個が存在します。

以上のことを考えたら分かると思いますよ。今回は、連立方程式 $\{③, ①'\}$ で考えています。

$$\begin{cases} y^2 + y - a - 9 = 0 & \cdots ③' \\ x^2 = 9 - y^2 \cdots ①' \end{cases}$$

③′ は y についての 2 次方程式なので実数解の個数は多くて 2 個です。また、①′ の方を考えると、$9 - y^2 > 0$ つまり $-3 < y < 3$ のとき、ひとつの y に対して x が 2 つずつ存在してくれます。

今回は、連立方程式の実数解の組の個数が 4 個です。そうなるためには、y についての 2 次方程式 ③ が、$-3 < y < 3$ で異なる 2 つの実数解を持てば OK です。

だって、そうだよね。$-3 < y < 3$ のときは、ひとつの y に対して x は 2 個存在します。つまり、x, y の実数解の組の個数は 2 個です。y が 2 個存在するとき、各々に対して 2 個ずつ x, y の実数解の組が存在します。だから、合わせて 4 個となります。

＊今回の問題、ちょっと説明が分かりにくかったかもしれません。丁寧に、解説しようと思えば、どうしても長く読みにくいものになってしまいました。ごめんなさい。

ただ、こうった考え方は、特に難関大学では重要ですよ。上位医学部や東大・京大を目指す人は今のうちからしっかりと理解しておいてくださいね。

【解答】

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 & \cdots ① \\ y = x^2 + a & \cdots ② \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 - 9 = 0 & \cdots ①' \\ x^2 - y + a = 0 & \cdots ②' \end{cases}$$

ここで、①′ − ②′ = ③ とする。

$$\begin{cases} y^2 + y - a - 9 = 0 & \cdots ③' \\ x^2 = 9 - y^2 \cdots ①' \end{cases}$$

{①, ②} であることと、{③, ①′} であることは同値である。

よって、連立方程式 {①, ②} が異なる 4 組の実数解をもつとき、{③, ①′} も異なる 4 組の実数解をもつ。

①′ より、$9 - y^2 > 0$ つまり $-3 < y < 3$ のとき、ひとつの y に対して x は 2 個存在する。

つまり、連立方程式 {③, ①′} が異なる 4 組の実数解をもつとき、y についての 2 次方程式 ③ が、$-3 < y < 3$ の異なる 2 個の実数解をもつ。

＊ここからは、単なる解の配置に関する問題です。もし、わからないひとは「回の配置のプリント　https://www.hmg-gen.com/2jino9.pdf」で勉強をしておいてください。

今回の場合、$D > 0$ かつ $-3 <$ (軸) < 3 かつ $f(-3) > 0$ かつ $f(3) < 0$ が、$-3 < y < 3$ の異なる 2 個の実数解をもつ条件ですよ。

$y^2 + y - a - 9 = 0$ の判別式を D とする。

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-a - 9) > 0$$
$$1 + 4a + 36 > 0$$
$$a > -\frac{37}{4} \cdots (\text{ア})$$

また、$f(y) = y^2 + y - a - 9$ とする。$f(y) = \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - a - 9$ となる。このとき、$-3 < -\frac{1}{2} < 3$ は成立する。

⇑ $-3 <$ (軸) < 3 とならないといけない。でも今回の場合、軸は a を含んでいない式で $-\frac{1}{2}$ は常に、$-3 <$ (軸) < 3 を満たしてくれているので OK です。

$$f(3) = 3^2 + 3 - a - 9 > 0$$
$$a < 3 \cdots (\text{イ})$$

$f(-3) = (-3)^2 - 3 - a - 9 > 0$

$$a < -3 \cdots (\text{ウ})$$

(ア), (イ), (ウ) より、$\boldsymbol{-\frac{37}{4} < a < -3}$

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司