「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

$a>1$ とする。辺の長さが $AB=a^2+a+1, BC=a^2-1, CA=2a+1$ であるような △ABC がある。

(1) 最大辺はどれか。　　(2) 最大角の大きさを求めよ。

【(１) の解説】

今回は、$a>1$ です。

$a>1$ のとき、$a^2+a+1>a^2-1$ が成立するよね。だから、$AB>BC$ が成立します。
⇑ 当たり前すぎて、かえって分かりにくいと思うので補足説明です。まず、当然 $a^2+1>a^2-1$ が言えます。今回の場合 $a>1$ つまり $a>0$ なので $a^2+a+1>a^2+1$ です。$a^2+a+1>a^2+1>a^2-1$ が言えます。

左と右を取り出せば、$a^2+a+1>a^2-1$ です。

最大辺は、当たり前だけど一番大きい辺。$AB>BC$ が言えた時点で BC は最大辺ではないということがわかりました。

じゃあ、最大辺は AB と CA のうちで大きい方ということが分かったよね。そこで、以下のことを覚えておいてください。

大小比較について

A と B の大小比較するとき、とりあえず $A-B$ をする。

その計算結果として、$A-B>0$ のとき $A>B$ となり、$A-B$ のとき $A<B$ となる。

＊上記は当たり前だよね。でも、意外に忘れやすいです。大小比較がきたら上記を思い出すようにしてください。

今回の場合、$AB = a^2 + a + 1$ と $BC = 2a + 1$ の大小比較です。とりあえず $AB - BC$ をしてみることにするね。

$AB - BC = a^2 + a + 1 - (2a + 1) = a^2 - a = a(a - 1) > 0$ です。

なぜ、$a(a - 1) > 0$ かと言うと、今回は $a > 1$ なんだよね。このとき a は正、$a - 1$ も正です。正どうしのかけ算は正なので、$a(a - 1) > 0$ となります。

【（１）の解答】

$a > 1$ のとき $a^2 + a + 1 > a^2 - 1$ である。よって、$AB > BC$。

最大辺は AB と CA のうち大きい方である。

$$\begin{aligned} AB - CA &= (a^2 + a + 1) - (2a + 1) \\ &= a^2 - a \\ &= a(a - 1) > 0 \ \ (\because \ \ a > 1 \text{ のとき、} a > 0, a - 1 > 0 \text{ より } a(a - 1) > 0) \end{aligned}$$

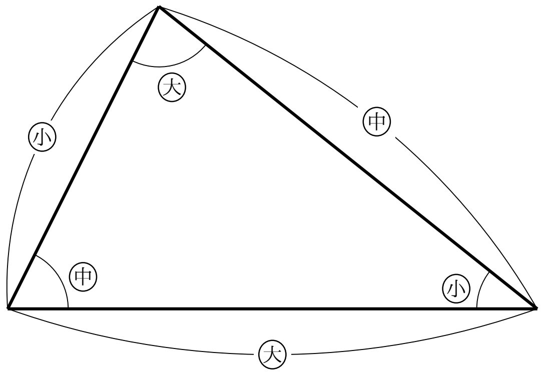
よって、$AB > CA$ となる。

以上より、最大辺は $\boldsymbol{AB}$ である。

【（２）の解説】

三角形の辺と角の大小関係については以下のことを覚えておいてください。

三角形の辺と角の大小関係について



上図のように、辺と対角の大小関係は一致します。

今回の場合、（１）で求めたように AB が最大です。このとき、AB の対角の C が最大角となります。

C の角度は、三角形の３辺が分かっているので余弦定理を使って求めていくことにします。

【（２）の解答】

（１）より、AB が最大なので、その対角の $\angle\mathrm{BCA}$ が最大角となる。$\angle\mathrm{BCA} = \theta\ (0^\circ < \theta < 180^\circ)$ とする。

⇑ 文字で置き換えた方が書きやすいので、$\angle\mathrm{BCA} = \theta$ としました。また、今回 θ は三角形の内角より、$0^\circ < \theta < 180^\circ$ を満たしますよ。

余弦定理より

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{(a^2-1)^2+(2a+1)^2-(a^2+a+1)^2}{2(a^2-1)(2a+1)} \\ &= \frac{4a^2+4a+1+a^4-2a^2+1-(a^4+a^2+1+2a^3+2a+2a^2)}{2(a^2-1)(2a+1)} \quad \text{◀ 分子はすべて展開した！} \\ &= \frac{4a^2+4a+1+a^4-2a^2+1-a^4-a^2-1-2a^3-2a-2a^2}{2(a^2-1)(2a+1)} \\ &= \frac{-2a^3-a^2+2a+1}{2(a^2-1)(2a+1)}\end{aligned}$$

$$=\frac{-a^2(2a+1)+2a+1}{2(a^2-1)(2a+1)}$$ ◀ 分子の左側２個を $-a^2$ でくくった！

$$=\frac{-(2a+1)(a^2-1)}{2(a^2-1)(2a+1)}$$ ◀ 分子を因数分解した。分母と約分できる！

$$=-\frac{1}{2}$$

$0° < \theta < 180°$ より、$\theta = 120°$。よって、最大角の大きさは **120°**。

【問題の補足】

かなり、計算ややこしかったよね。でも、このくらいできるようになっておいてくださいね。

特に難しかったのは、分子を因数分解するところだったと思います。「言われたら気づくけど、なかなか思いつけないよ」なんて思う人もいます（高校生のときの、僕がそうでした（汗 … 笑顔））

でも、問題から考えたら簡単ですよ。どういうことかと言うと、今回は「最大角の角を求めよ」なんだよね。ということは、当たり前なんですけど、最大角が求められます。

で、余弦定理で解いていったんだけど θ の値が分かるためには、$\cos\theta$ は a を含まない単なる数字にならないと θ が分からない。$\cos\theta$ が a を含んだ式では求められない、「分母と分子約分ができて、a が消えてくれるんだろうな」と予想した上で解いていきます。そうすると、気づけるようになりますよ。

また、今回は $-2a^3-a^2+2a+1=-a^2(2a+1)+2a+1$ と共通因数を見つける方法でときました。

ですが、数学 II の高次方程式を勉強しているのなら、$-2a^3-a^2+2a+1$ は $x+1$ or $x-1$ or $2a+1$ で割り切れるということは、分母から見て想像できます。

どれでやってもいいけど、例えば $x-1$ を因数にもつから $x-1$ で割り切れるという方法で解いてもらってもいいですよ。

【追伸】

さらに、いえばこの問題、計算をしなくても問題をみた瞬間に答えが $120°$ になるというのは想像できます。

余弦定理で $\cos\theta$ の値を求めて解いていくんだよね。符号を考えずにやれば $\cos\theta$ の値が分かるのは $\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{2}$ の 3 つなんだよね。でも、今回の場合 $\sqrt{3}$ や $\sqrt{2}$ は含まれていないので、$\dfrac{1}{2}$ or $-\dfrac{1}{2}$ になるしかありません。

ここから $\cos\theta = \dfrac{1}{2}?-\dfrac{1}{2}?$ のどっちになるのかな？と考えます。

$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき、最大角が $60°$ ってことなんだよね。でも、最大角が $60°$ の三角形って正三角形。（1）で $AB > CA$ などを求めたけどこの時点で正三角形はありえないよね。ということは、$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ の方、つまり $\theta = 120°$ ということは想像できます。

今の、答えの想像の仕方、まったく数学的ではありません。ただ、数学の問題を解くときに「おそらくこうなるだろうな」と考えて解いていくことも重要です。

難しい問題になれば「計算結果がこうなったら解ける。ということは、計算結果がこうなるように変形できて欲しいな。強引に変形できないかな？」なんて考えることも出てきます。

こんな話し、あまりしてくれる人いないけど、数学のできる人はみんな無意識でやっていることです。

数学の能力があまり高くない人も、こういったことで知識武装して、やっていけば数学のできる人と同じように難しい問題でも考えて解けるようになりますよ。頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司