「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

A と B の２人があるゲームを繰り返し行う。１回ごとのゲームで A が B に勝つ確率は p、B が A に勝つ確率は $1-p$ であるとする。n 回目のゲームで初めて A と B の双方が４勝以上になる確率を求めよ。

(1) x_n を p と n で表せ。

(2) $p=\dfrac{1}{2}$ のとき、x_n を最大にする n を求めよ。

【(１) の解説】

自分で立式していくタイプの問題です。難しく感じている人が多いと思いますが、少し考えれば簡単ということが多いですよ。

毛嫌いせずに丁寧に考えていくようにしてくださいね。

「n 回目のゲームで初めて A と B の双方が４勝以上」となっています。双方とも４勝以上となっている時点で、「少なくとも８試合は必用」ということが分かります。

ということは、$n \leqq 7$ のとき $x_n=0$ であることが分かります。

$n \leqq 7$ のときは分かったので、$n \geqq 8$ のときどうなるかな？と考えます。で、そこで自分で立式します。

「n 回目のゲームで初めて A と B の双方が４勝以上」となるとき、A,B があるけど、例えば A が n 回目のゲームで４勝目を上げるときを考えてみます。

こうなるとき、「$n-1$ 回目までの試合で A が３勝、B が $n-4$ 勝 (← 全部で $n-1$ 試合。A

が３勝と言うことは、$(n-1)-3=n-4$ 回 B が勝ちます）していて、n 回目の試合で A が勝つ」ことです。

n 回目の試合で A が勝って、A と B の双方が４勝以上になるためには $n-1$ 回目までに A が３勝、B が４回以上勝っていて、次の n 回目に A が勝てば OK です。

今回の場合、$n-1$ 回目までに A が３勝、ということは B の $n-4$ 勝です。さらに $n \geqq 8$ で考えているんだよね。ということは、$n-4 \geqq 4$ です。

だから、B は必ず４勝以上しています。

＊「$n-1$ 回目までの試合で A が３勝、B が $n-4$ 勝ていて、n 回目の試合で A が勝つ」だけで解くと、「あれ？B が４勝以上しないといけない条件を忘れているんじゃないの？」と思う人がいるので丁寧に説明しています。

とにかくこういった問題は丁寧に考えて、数え落としや重複がないように立式していきます。ただ、今回の問題もそうだけど、うまい具合に問題を作ってくれているということが多いですよ。

【（１）の解答】

(ｉ) $n \leqq 7$ のとき、$x_n = 0$

(ii) $n \geqq 8$ のとき

n 回目のゲームで初めて A と B の双方が４勝以上となるのは、

（ア）$n-1$ 回目のゲームまでで A の３勝、B の $n-4$ 勝で、さらに n 回目のゲームで A が勝つとき

（イ）$n-1$ 回目のゲームまでで A の $n-4$ 勝、B の３勝で、さらに n 回目のゲームで B が勝つとき

上記の２通りがある。

（ア）の場合の確率は、${}_{n-1}\mathrm{C}_3 p^3(1-p)^{n-4} \times p$
⇑ ${}_{n-1}\mathrm{C}_3 p^3(1-p)^{n-4}$ は単なる反復試行の確率です。

反復試行の確率について分からない人は、https://www.hmg-gen.com/kaitou1-17.pdf で勉強をしておいてください。

（イ）の場合の確率は、${}_{n-1}\mathrm{C}_3(1-p)^3 p^{n-4} \times (1-p)$

よって、

$$\begin{aligned} x_n &= {}_{n-1}\mathrm{C}_3 p^3(1-p)^{n-4} \times p + {}_{n-1}\mathrm{C}_3(1-p)^3 p^{n-4} \times (1-p) \\ &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2\cdot 1} p^4(1-p)^{n-4} + \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3\cdot 2\cdot 1} p^{n-4}(1-p)^4 \\ &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}\{p^4(1-p)^{n-4} + p^{n-4}(1-p)^4\} \end{aligned}$$

⇑ 答えは、カッコにくくるなどしてできるだけキレイな形で表します。ただ、今回の場合くくり出してもこれ以上キレイになりそうにないので上記のまま止めておきます。

よく「解答はどこまで変形しないといけないですか？」と質問されます。でも、それはその場その場で変わってくるとしか答えようがありません。ただ、そこまで神経質にならなくてもいいです。多少答え方が違っても多くの場合減点されることは少ないです。

以上より、$x_n = \begin{cases} \mathbf{0} & (\boldsymbol{n \leqq 7}) \\ \boldsymbol{\dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6}\{p^4(1-p)^{n-4} + p^{n-4}(1-p)^4\}} & (\boldsymbol{n \geqq 8}) \end{cases}$

【（２）の解説】

確率の最大値を求める問題です。この類の問題は受験では頻出です。学校で使っている問題集でも 1 問は載っていると思います。

でも、しっかりと理解出来ている人が少ないので、解説をしておきます。まずは、以下のことを覚えておいてください。

確率の最大値・最小値問題について

確率の最大値・最小値問題では、$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ または $P_{n+1}-P_n$ を求める。

$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ が1より大きいか小さいか、$P_{n+1}-P_n$ が0より大きいか小さいかで考える!!

いきなり上記を書いてもよくわからないという人が多いと思うので、今から説明していきます。まず、その前に $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ が1より大きいか小さいかということと、$P_{n+1}-P_n$ は0より大きいか小さいかということはまったく同じことを言っています。

例えば $\dfrac{P_{n+1}}{P_n}>1$ という不等式を考えます。確率の P_n は正です（厳密に言うと、確率は0になることもあります。ただ、分母に来ている時点で、確率が0以外のときで考えています。このときの確率は正です）。

だから、$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}>1$ の両辺に P_n をかけても不等号の向きは変わりません。$P_{n+1}>P_n$ となり、P_n を左辺に移項すると $P_{n+1}-P_n>0$ となります。

よって、$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ が1より大きいか小さいかということと、$P_{n+1}-P_n$ が0より大きいか小さいかということはまったく同じことなんです。だから、好きな方で解いてもらってOKですよ。

ただ、問題によっては設問で、「$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ を計算せよ」とか「$P_{n+1}-P_n$ を計算せよ」と誘導が付いているときもあります。だから、両方の解き方があるということを覚えておいてくださいね。

少し話が前後してしまいました。ここから、なぜ P_n の最大値や最小値を求めるときに、$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ を計算するか？ということを話していきます。

簡単な例として、$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}=\dfrac{3n}{5n-7}$ となるときでやっていきたいと思います。

$\dfrac{P_{n+1}}{P_n}$ をしたときは、1 より大きいか小さいかということを考えるんだったんだよね。

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1$$
$$\frac{3n}{5n-7} > 1$$
$$3n > 5n - 7$$
$$n < 3.5$$

上記のようになります。$n < 3.5$ってなったけど n は自然数なので $n < 3.5$ をみたす自然数は $n = 1, 2, 3$ のときだよね。このとき、$\dfrac{P_{n+1}}{P_n} > 1$ つまり $P_n < P_{n+1} \cdots ①$ となります。

で、$\dfrac{P_{n+1}}{P_n} < 1$ を解けば $n > 3.5$ となり、n は自然数なので $n \geqq 4$ です。
このとき、$P_n > P_{n+1} \cdots ②$ となります。

で、$n = 1, 2, 3$ のとき、$P_n < P_{n+1}$ なんだから $P_1 < P_2 < P_3 < P_4$ が成立するよね。$n = 1, 2, 3$ のとき ① に代入していっただけですよ。

さらに $n \geqq 4$ のときは ② が成立するので、$n = 4$ のとき ② は $P_4 > P_5$ で、$n = 5$ のとき ② は $P_5 > P_6$ となります。

以上より、$P_1 < P_2 < P_3 < P_4 > P_5 > P_6 > \cdots$ という不等式が成立します。で、これを見てもらえば分かると思うけど、P_4 が最大となっているよね。

確率の最大値・最小値はこのようにして求めていきます。上記のときは最大値しか求まりません。最小値を求めるときは、例えば $P_1 > P_2 > P_3 < P_4 < P_5 < \cdots$ とでもなっているとき P_3 が最小となりますよ。

確率の問題は圧倒的に最大値を求めさせることが多いような気がします。ただ、最小値を求める問題もたまに出てくるので覚えておいてくださいね。それでは、解答に進みます。

【(２) の解答】

$p = \dfrac{1}{2}$ のとき、

$n \geqq 8$ のとき

$x_n = \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} \cdot 2 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^n = \dfrac{(n-1)(n-2)(n-3)}{3} \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ となる。

$n \geqq 8$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2^{n+1}} \times \frac{3 \cdot 2^n}{(n-1)(n-2)(n-3)} \\ &= \frac{n}{2(n-3)}\end{aligned}$$

$\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ を解くと、$n > 6$ となる。よって、$n \geqq 8$ のとき常に $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ つまり $x_{n+1} < x_n$ となる。

＊今回はかなり珍しいパターンです。$n \leqq 7$ のとき $x_n = 0$ です。$n \geqq 8$ のとき、$x_{n+1} < x_n$ より、$x_8 > x_9 > x_{10} > \cdots$ です。ということは、最大にする n は $n = 8$ です。

ホントにいいの？なんて思うけど、こういうパターンもたまに出てきます。ただ、可能性としては低そうです。だから、こういう答えになったときは、より丁寧に見直すようにしておいてください。

$n \leqq 7$ のとき $x_n = 0$ である。また、$n \geqq 8$ のとき $x_n > x_{n+1} (> 0)$ である。

よって、$n = \mathbf{8}$ のとき、x_n は最大となる。

＊実は、これ一橋大学の過去問ですよ。一橋大学ほどの難関大学でも、意外に簡単に解けたよね。こういうレベルの問題を確実に解けるようになっておいてくださいね。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司