

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

単元：数学Ⅱの「数と式」 難易度：「基礎レベル」

*難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

不等式 $|x + 2| > |2x - 4|$ を解け。

【解説】

絶対値を含んだ不等式の問題です。学年が上の方は、「こんな問題、簡単だ！」と思う人もいます。

でも、普段授業をしていて数学が得意と言っている人でも意外に理解できていない人が多いです。ごくごく簡単に読める内容なので、「簡単だ！」なんて思わずに目を通してくださいね。

それでは、問題に進みます。まず、絶対値に不等式には主に3通りの解き方があります。

「① 場合分けをして解く解法」「② グラフを使って解く解法」「③ 同値変形を使って解く解法」の3通りです。

① の場合分けをして解く解法はどんな問題でも解くことができます。ただ、計算がメン

ドウになることも多いです。

②のグラフも場合分けをしてからグラフを描いていきます。基本的には①の場合分けをして解いていく解法と違いありません。

ただ、グラフは視覚的にとらえることができるので、単純に計算をするよりも簡単に答えられることが多いです。

③の同値変形を使った解法です。同値変形で解ける場合、この解き方で解くのが一番ラクということが多いです。

ただ、「同値変形」をしっかりと理解しておかないと間違ってしまうです。同値変形を使って解くときは、「本当に大丈夫か？」とイヤになるくらい確認するクセを付けておいてください。

安易にこの変形をしたら間違えることが多いですよ。

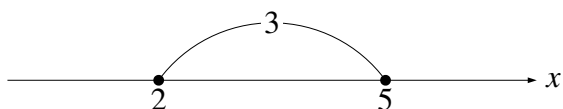
今回の問題は、①, ②, ③のいずれの解法でも解くことができます。すべての解法で解いていきますね。

【①の解法の解説】

まず、これに進む前に絶対値について話しておきます。

* $|A|$ とは、数直線上での原点から点 A までの距離である。

例えば、数直線上の2点、 $A(2), B(5)$ の距離は？と聞くと、 $AB = 3$ ってなるよね。



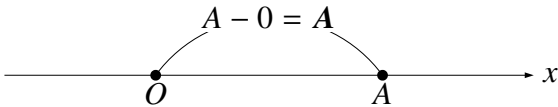
どうやって2点間の距離を求めたのかというと、 $5 - 2 = 3$ と求めました。つまり、大きい方（右側）から小さい方（左側）の値を引くと、数直線上における2点間の距離を求

めることができるんだよね。

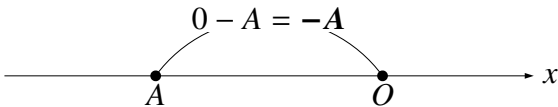
これを考えたら、 $|A|$ を求めることができますよ。 $|A|$ とは、数直線上における原点から点 A までの距離だったんだよね。

A が正のときと、 A が負のときで、原点よりも大きいか小さいかが変わってくるので場合分けが必要です。

$A > 0$ のとき（*点 A は原点よりも右側にある）



$A < 0$ のとき（*点 A は原点よりも左側にある）



これで、みんながよく知っている、絶対値の外し方を理解することができたと思います。（*こんなの、別に知らなくても丸暗記でも大丈夫です。ただ、意味を知っていた方が、忘れにくくていいよね。）

絶対値の外し方

$$|A| = \begin{cases} A & (A \geq 0) \\ -A & (A < 0) \end{cases}$$

* $A = 0$ のときは、別にどちらでもいいですよ。 $-0 = 0$ とみなしますから。だから、上記を $|A| = \begin{cases} A & (A > 0) \\ -A & (A \leq 0) \end{cases}$ と $-A$ のほうに $A = 0$ をいれてもいいですよ。

また、あまりしませんが $|A| = \begin{cases} A & (A \geq 0) \\ -A & (A \leq 0) \end{cases}$ と両方にイコールを入れてもらっても間違いではありません。ただ、こういうときは、イコールはどちらか一方だけに入れるということが多いですよ。

それでは、今回の問題に進むね。まずは、場合分けをして解く解法です。

【解説—場合分けを使って解く解法】

今回は、 $|x+2| > |2x-4|$ と絶対値が2つあります。絶対値が2つあるから、場合分けが少しメンドウです。

絶対値がひとつだったら、頭の中で考えても簡単です。例えば、ひとつめの $|x+2|$ なら、絶対値の中身の $x+2$ が0以上のとき、 $x+2$ が0未満のときとで簡単に分かるよね。

でも、今回のように絶対値が2個以上あるときは、以下のような表をかくのが分かりやすいと思いますよ（*別に、何がなんでも表をかけ、という訳ではありません。慣れてきたら、頭の中だけでできるようになる人も多いです。

ただ、最初のうちは混乱する人も多いと思います。そんなとき、以下で紹介するような表をかけば混乱せずに解くことができますよ、ということです。）

x		-2		2	
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

↑上図より、 $x < -2$ のとき $x+2 < 0, 2x-4 < 0$ 。 $-2 < x < 2$ のとき $x+2 > 0, 2x-4 < 0$ 。 $2 < x$ のとき $x+2 > 0, 2x-4 > 0$ であることがわかります。

表を書いたら $x+2$ や $2x-4$ の符号が分かりやすいよね。あと、 $x = -2$ や $x = 2$ だけど、どちらか好きな方に入れて場合分けをしていってもらえばいいですよ。

さっきもちよっと話したけど、 $|A|$ を場合分けをして絶対値を外すとき、 $A = 0$ はどっちに入れてもらっても良かったんだよね。それでは、解答に進みます。

【解答—場合分けを使って解く解法】

$$|x + 2| > |2x - 4|$$

x		-2		2	
$x + 2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x - 4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$

*上記の表は、答案で記入してもらってもいいですし、余白の部分にかいて答案には記入しない、それでも大丈夫ですよ。ただ、間違えやすいので間違えないようにしてくださいね。

また、変わり目の $x = \pm 2$ は、どちらかの場合分けに入れておけばOKです。今回は、2つめの場合分けに $x = \pm 2$ の両方を含めることにします。

(i) $x < -2$ のとき

$$|x + 2| > |2x - 4|$$

$$-(x + 2) > -(2x - 4) \quad \blacktriangleleft x < -2 \text{ のとき、} x + 2 < 0, 2x - 4 < 0 \text{ より!}$$

$$-x - 2 > -2x + 4$$

$$x > 6$$

*これで、 $x > 6$ を答えにしたらダメですよ。「場合分けをしたときは、場合分けをした条件を考える」ということを絶対に忘れないようにしてください。

今回の場合、 $x < -2$ としたんだよね。だから、最後に $x < -2$ を考えないとダメですよ。

$x < -2$ かつ $x > 6$ をみたら x はない。

(ii) $-2 \leq x \leq 2$ のとき

$$|x+2| > |2x-4|$$

$$x+2 > -(2x-4) \quad \leftarrow -2 \leq x \leq 2 \text{ のとき、} x+2 \geq 0, 2x-4 \leq 0 \text{ より！}$$

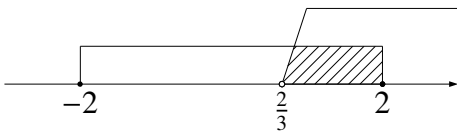
$$x+2 > -2x+4$$

$$3x > 2$$

$$x > \frac{2}{3}$$

*ここから、場合分けの条件 $-2 \leq x \leq 2$ を含めて考えます。

$$-2 \leq x \leq 2 \text{ かつ } x > \frac{2}{3} \text{ より}$$



$$\text{よって、} \frac{2}{3} < x \leq 2$$

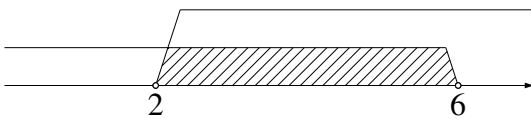
(iii) $2 < x$ のとき

$$|x+2| > |2x-4|$$

$$x+2 > 2x-4 \quad \leftarrow 2 < x \text{ のとき、} x+2 > 0, 2x-4 > 0 \text{ より！}$$

$$x < 6$$

*ここから、場合分けの条件 $2 < x$ を含めて考えます。



$$\text{よって、} 2 < x < 6$$

*ここから、(i),(ii),(iii) の場合分けで求めた答えをまとめたものが答えです。

以上より、不等式の解は $\frac{2}{3} < x \leq 2$ または $2 < x < 6$ 。つまり、 $\frac{2}{3} < x < 6$ である。

*絶対値を含んだ問題では、この場合分けを使って解く解法を使えば必ず解くことができます。ただ、今回でも3個に場合分けをして解いていったからメンドウだったよね。

場合分けをして解く解法は、絶対に解けます。ただ、メンドウになることも多いので、他の解法で解けるときは他の解法で解いたほうがいいですよ。

【解説—グラフを使って解く解法】

次にグラフを使って解く解法を解説します。これも、場合分けをして解かないといけな
いので解き方としてはほとんど解法その1の場合分けをして解く解法と同じです。

ただ、グラフで解いた方が視覚的に判断できるので簡単に解けるということがあります。

絶対値を含んだ不等式だけに限った話ではありません。不等式が出てきたときは、「グラフで考えるのでは？」と思えるクセをつけておいてくださいね。

今まで、グラフ、グラフと言いました。ですが、グラフで不等式を解くといっても分からないと思います。だから、今からグラフで不等式を解く方法を解説します。

例えば $f(x) > g(x)$ を解くとき、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の2つのグラフをかいてグラフの上下関係で解いていきます。

$f(x) > g(x)$ とは、 $f(x)$ の方が $g(x)$ よりも値が大きい。両方とも $y = f(x), y = g(x)$ としたので $f(x), g(x)$ とともに y 座標です。

y 座標の値が大きいとき、グラフで言えば上側にあるときです (y 座標は上にいけばいくほど、値が大きくなるよね)

だから、 $f(x) > g(x)$ は、 $y = f(x), y = g(x)$ の2つのグラフをかき $y = f(x)$ のグラフの方が、 $y = g(x)$ のグラフよりも上側になるような x の値の範囲がこの不等式の解となります。

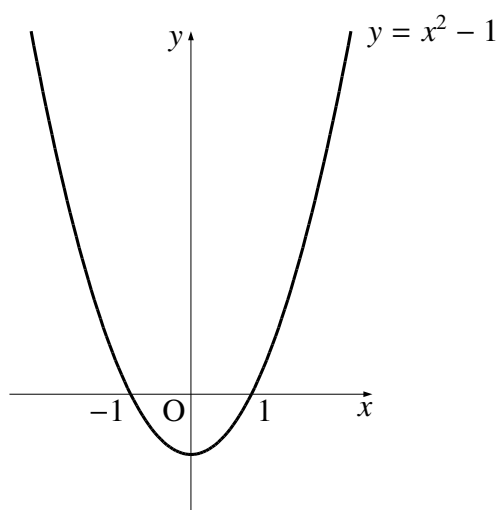
それでは、今から $y = |f(x)|$ のグラフについて話していきます。知っている人も多いと思うけど、よく出てくるので覚えておいてくださいね。

* $y = f(x)$ のグラフは、 $y \geq 0$ の部分は $y = f(x)$ のままで、 $y < 0$ の部分は $y = -f(x)$ となる。

$y = -f(x)$ のグラフは、 $y = f(x)$ を x 軸に関して対称移動したもの、つまり x 軸で折り返したものですよ。だから、 $y = |f(x)|$ のグラフをかくとき、とりあえず $y = f(x)$ のグラフをかいて、 $y \geq 0$ の部分はそのまま、 $y < 0$ の部分は $y = f(x)$ のグラフを x 軸で折り返したらいいだけですよ。

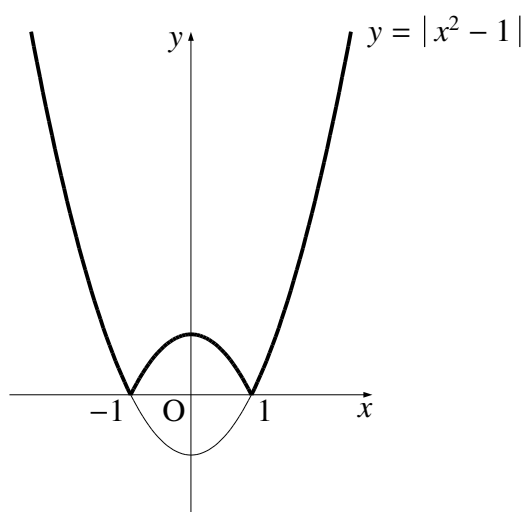
例えば、 $y = |x^2 - 1|$ のグラフをかいてみます。

まず、 $y = x^2 - 1$ のグラフをかくね。このグラフは以下のようになります。



それでは、次に $y = |x^2 - 1|$ のグラフをかいていきます。先ほど、話したように $y = |f(x)|$ のグラフは、 $y \geq 0$ の部分 (x 軸より上側) は、 $y = f(x)$ のグラフのままで、 $y < 0$ の部分 (x 軸より下側) は x 軸に関して対称移動 (x 軸で折り返し) します。。

だから、 $y = |x^2 - 1|$ のグラフは以下のようになります。



↑ $y = -x^2 + 1$ のグラフで、 x 軸より上側の部分はそのままで、 x 軸より下側の部分は x 軸で折り返した！

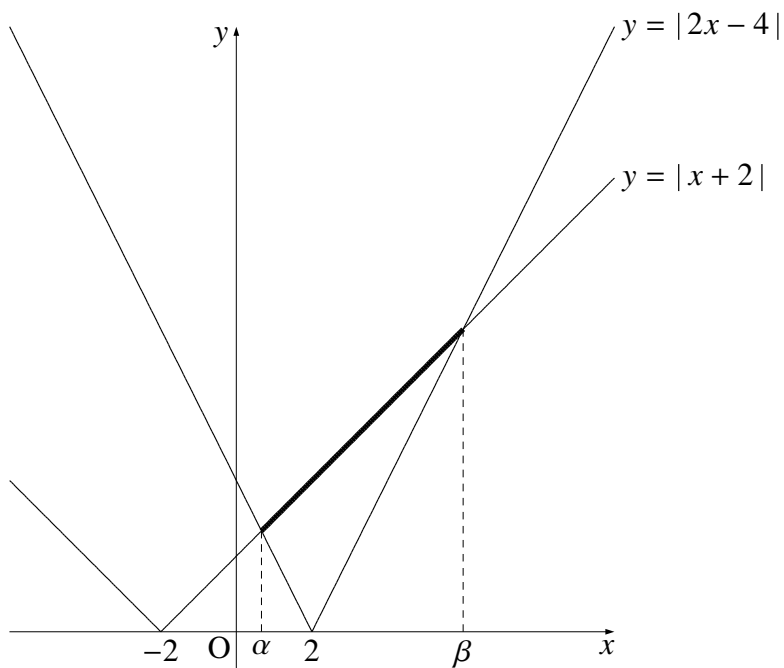
では、これを踏まえた上で今回の不等式をグラフを使って解いていきます。

【解答ーグラフを使って解く解法】

$$|x + 2| > |2x - 4|$$

ふたつのグラフ、 $y = |x + 3|$, $y = |2x - 4|$ で $y = |x + 2|$ のグラフの方が、 $y = |2x - 4|$ のグラフより上側にある x の値の範囲が、不等式の解と一致する。

↑ 答案ではここまで丁寧に書かなくても大丈夫ですよ。グラフをかいて「グラフより…」といきなり答えをかく、その程度で大丈夫です。



↑これでふたつのグラフをかくことができました。 $y = |x + 2|$ のグラフの方が、 $y = |2x - 4|$ のグラフよりも上側にあるような x の値の範囲を求めます。これが答えです。

上図のように交点の x 座標を α, β とすると不等式の解は $\alpha < x < \beta$ となります。

α は $y = x + 2$ と $y = -(2x - 4)$ の交点の x 座標、 β は $y = x + 2$ と $y = 2x - 4$ の交点の x 座標です。

$$y = x + 2, y = -(2x - 4) \text{ より } x = \frac{2}{3}, \text{ また } y = x + 2, y = 2x - 4 \text{ より } x = 6$$

よって、不等式の解は $\frac{2}{3} < x < 6$ である。

*今回の問題では、グラフで解いてもさほど簡単になりませんでした。ただ、不等式の問題はグラフを使って解くと、視覚的にとらえることができ簡単に解けることがあります。

この不等式で解く解法は重要なので、しっかりと覚えておいてくださいね。

【解法一同値変形を使って解く解法】

絶対値を含んだ不等式の問題では、同値変形を使って解けるものも多いです。

ただ、気を付けないといけないのは同値変形は使えるときと使えないときがあります。

当たり前ですけど、同値じゃないのに同値として解いていたら答えが間違ってしまうですよ。

それだけ、同値変形を使って解くときは気を付けないといけないんです。ただ、同値変形で解けるときは同値変形を使って解いたらラクになることが多いです。

同値変形は、それだけパワフルな技です。繰り返しになります。ただ、同値変形はしっかりと理解して上で使わないと間違ってしまうですよ。気を付けてください。

今回は、以下の同値変形を使います。

有名な同値変形

$A \geq 0, B \geq 0$ のとき、

$$A > B \Leftrightarrow A^2 > B^2$$

*両辺とも0以上のとき、両辺を2乗しても大小関係は変わりません。だから、両辺を2乗しても同値です。不等式の両辺を2乗して同値となるときは、両辺とも0以上のとき、とすることを覚えておいてくださいね。

上記は、本当に重要だからしっかりと覚えておいてね。

今回は、詳しく話しません。不等式に限らず、等式でも両辺を2乗すると同値性が崩れることがあります。だから、両辺を2乗するときはよほど注意するようにしてくださいね。

今回の不等式は、 $|x+2| > |2x-4|$ です。絶対値は原点からの距離だったんだよね。距離は、0以上です。だから、絶対値は0以上です。

今回は両方とも0以上ということが言えたので、両辺を2乗してもOKですよ。テキスト

ウに考えて2乗するのではなくて、しっかりと考えた上で2乗をするようにしてくださいね。

また、 $|A|^2 = A^2$ という公式が成立しますよ。これは、簡単です。 $A \geq 0$ のとき、 $|A| = A$ です。だから、 $|A|^2 = A^2$ と言えます。

また、 $A < 0$ のとき、 $|A| = -A$ です。だから、 $|A|^2 = (-A)^2 = A^2$ です。

$A \geq 0$ のときも、 $A < 0$ のときも $|A|^2 = A^2$ なので、公式 $|A|^2 = A^2$ が成立します。

ルートするとき2乗したらルートが消えてくれます。だから、2乗することが多いです。同じように、絶対値も2乗したら絶対値が消えてくれます。だから、2乗することがあります。

ただ、さっきも言ったけど2乗すると同値性が崩れることがあります。つねに、同値性を意識して解くようにしてくださいね。

【解答一同値変形を使って解く解法】

$|x+2| \geq 0, |2x-4| \geq 0$ である。

よって、 $|x+2| > |2x-4|$ と $|x+2|^2 > |2x-4|^2$ は同値である。

$$|x+2|^2 > |2x-4|^2$$

$$(x+2)^2 > (2x-4)^2$$

$$(2x-4)^2 - (x+2)^2 < 0$$

$$\{(2x-4) - (x+2)\}\{(2x-4) + (x+2)\} < 0$$

↑展開をしてもいいけど、2乗ひく2乗の形になっているので因数分解の公式を使いました！

$$(x-6)(3x-2) < 0$$

$$\frac{2}{3} < x < 6$$

*今回は3つの解法で解きました。3番目の同値変形で解く解法が一番ラクだったよね。

ただ、3つの解法全て重要です。しっかりと、理解しておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあつてそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司