

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

実数 x に対して、 $[x]$ は $n \leq x < n + 1$ となる整数 n を表す。

2つの関数 $f(x) = [x^2 - x * 1]$ と $g(x) = [x]^2 - [x] + 1$ について考える。

(1) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ と $g\left(\frac{1}{2}\right)$ の値を求めよ。

(2) $f(x) = 0$ を満たす x の値がとり得る範囲を求めよ。

(3) x が $0 \leq x < 3$ のとき、 $g(x)$ がとり得る値をすべて求めよ。

【解説】

ガウスの問題です。 $[x]$ は、「ガウス x 」と読み、意味としては x を超えない最大の整数です。

ガウスは、ほとんどの教科書に掲載されています。ただ、指導要領では載せなくてもよいことになっています。だから、大学受験の問題で出題されるときは、「 $[x]$ は x を超えない最大の整数」や今回のように「実数 x に対して、 $[x]$ は $n \leq x < n + 1$ となる整数 n を表す」と説明されていることが多いです。

なお、上記の2つですが表現の仕方が違うだけで、同じことを言っているということを理解しておいてくださいね。

ただ、僕はガウスは「 $[x]$ は x の整数部分」と理解しています。こっちの方が分かりやすいと思いますよ。

【(1) の解答】

$$\begin{aligned} & f\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} + 1 \right] \\ &= \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + 1 \right] \\ &= \left[\frac{3}{4} \right] \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

↑ $\frac{3}{4}$ の小数部分は0。だから、 $\left[\frac{3}{4} \right] = 0$ です。

$$\begin{aligned} & g\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \left[\frac{1}{2} \right]^2 - \left[\frac{1}{2} \right] + 1 \\ &= 0^2 - 0 + 1 \quad \left(\left[\frac{1}{2} \right] = 0 \right) \\ &= \mathbf{1} \end{aligned}$$

↑ 数式の中にガウスが入っていても落ち着いて解くようにしてくださいね。 $\frac{1}{2}$ の整数部分が0なので、 $\left[\frac{1}{2} \right] = 0$ です。

【(2) の解答】

* $f(x) = 0$ となっています。でも、 $f(x) = [x^2 - x + 1]$ なのだから、要するに $x^2 - x + 1$ の整数部分が0つまり $0 \leq x^2 - x + 1 < 1$ を満たしていたら OK ですよ。

$f(x) = 0$ となるとき、 $0 \leq x^2 - x + 1 < 1$ をみます。

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \text{ より、} 0 \leq x^2 - x + 1 \text{ は常に成立する。}$$

↑ 上記はすぐに気づけた人もいます。でも、 $x^2 - x + 1 = 0$ を解の公式で解いてみると実数解はありません。その段階で、「あっこれは」と気づけたら十分ですよ。僕も気づけずに、解の公式で計算をして気づきました。

$x^2 - x + 1 < 1$ を解くと、 $0 < x < 1$ である。

以上より、 x の値がとり得る範囲は $0 < x < 1$ である。

【(3) の解答】

* $g(x)$ でガウス記号を含んでいるものは、 $[x]$ のみです。 $[x]$ は x の整数部分です。整数部分によって場合分けをしていきます。

(i) $0 \leq x < 1$ のとき

↑ このとき x の整数部分は 0 なので、 $[x] = 0$ です。

$$\begin{aligned} g(x) &= [x]^2 - [x] + 1 \\ &= 0^2 - 0 + 1 \quad \blacktriangleleft [x] = 0 \text{ より！} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(ii) $1 \leq x < 2$ のとき

↑ このとき x の整数部分は 1 なので、 $[x] = 1$ です。

$$\begin{aligned} g(x) &= [x]^2 - [x] + 1 \\ &= 1^2 - 1 + 1 \quad \blacktriangleleft [x] = 1 \text{ より！} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(iii) $2 \leq x < 3$ のとき

↑ このとき x の整数部分は 2 なので、 $[x] = 2$ です。

$$\begin{aligned} g(x) &= [x]^2 - [x] + 1 \\ &= 2^2 - 2 + 1 \quad \blacktriangleleft [x] = 2 \text{ より！} \\ &= 3 \end{aligned}$$

以上より、 $g(x)$ がとり得る値は **1, 3** である。

* この問題は明治薬科大学の過去問です。見た感じ少しややこしそうですが、丁寧に考えていけばそこまで難しくなかったよね。

受験問題といっても丁寧に考えていけばそこまで難しい問題が多いです。こういった問題をしっかりと解けるようになっておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司