「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

以下の問いに答えよ。
(1) m^2 が５の倍数ならば、m は５の倍数であることを示せ。
(2) $\sqrt{5}$ が無理数であることを示せ。

【(１) の解説】

これは対偶を使って証明します。

どういったときに対偶を使うの？と質問を受けることがあります。

対偶を使うのは、待遇を使う方が証明をしやすいときです。「何、当たり前のこと言ってんの？」と思ったよね。今回の問題の場合、もとの命題は「m^2 が５の倍数ならば、m は５の倍数である」です。m^2 が５の倍数から m が５の倍数にはもっていきにくいよね。

＊次数の高いものから低いものにするのは難しいです。例えば $m^2 = 5k$ から次数を低くしようとすれば $m = \pm\sqrt{5k}$ なんてややこしい式になります。

でも、$m = 5k$ なら $m^2 = 25k^2$ と計算できます。だから、次数の高いものを使って低いものにもっていくより、次数の低いものを使って高いものにもっていく方が簡単です。

「m^2 が５の倍数ならば、m は５の倍数である」の対偶は、「m が５の倍数でないならば、m^2 が５の倍数でない」です。これだと、次数の低いものを使って次数の高いものを証明することになるよね。

こういうふうな場合対偶を使います。慣れてくるとどういったときに対偶を使うか？ということが簡単に分かることが多いです。

ただ、慣れてくるまでは「対偶を使った方がラクなのかな？」と頭に入れて、証明を見るたびに「対偶は使えるか？」と確認をしてもらったらいいと思いますよ。

【（１）の解答】

「m^2 が５の倍数ならば、m は５の倍数」の対偶は「m が５の倍数でないならば、m^2 は５の倍数でない」である。

以下対偶を示す。

＊５の倍数でない数は、５で割ったとき余り１，２，３，４のいずれかだよね。だから、$m = 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$ と表します。

ただ、こうするよりも $m = 5k-2, 5k-1, 5k+1, 5k+1$ とした方が計算がラクになることが多いです。こうしてよい理由ですが、$5k-2 = 5(k-1)+3$ と $5\times(\text{整数})+3$ の形で表せるので $5k-2$ は５で割って３余り数です。

$5k-1$ も同様に $5k-1 = 5(k-1)+4$ の形で表せるので５で割って４余る数です。

また、さらに $m = 5k-2, 5k-1, 5k+1, 5k+1$ を $m = 5k\pm 2, 5k\pm 1$ と表すこともあります（こうした方が同じ計算を何度も書かないでよいのでラクです）

m が５の倍数でないとき、k を整数として $m = 5k\pm 1, 5k\pm 2$ と表せる。

（ｉ）$m = 5k\pm 1$ のとき

$$m^2 = (5k\pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1$$

$5k^2 \pm 2k$ は整数なので、m^2 は５で割って１余る数。つまり、５の倍数ではない。

(ii) $m = 5k \pm 2$ のとき

$$m^2 = (5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5(5k^2 \pm 2k) + 4$$

$5k^2 \pm 2k$ は整数なので、m^2 は５で割って４余る数。つまり、５の倍数ではない。

以上より、「m が５の倍数でないならば、m^2 は５の倍数でない」は真である。

命題の真偽と、その対偶の真偽は一致するので「m^2 が５の倍数ならば、m は５の倍数である」も真である。（証明終）

【(２）の解説】

「無理数であることを示せ」という問題です。「無理数であることを示せ」ときたら、まず間違いなく背理法を使って解いていくと思ってもらってよいですよ。

まあ、例外がないという訳ではありません。ただ、「無理数を示せ」ときたら「背理法を使うのでは？」と思えるようになっておいてください。

たまに、「背理法はどんなときに使うの」と質問を受けます。いろいろな場合があるのですが、２種類だけに分類されるとき背理法を使うことが多いです。

今回のような、無理数の場合、実数を前提で考えると「有理数と無理数」の２種類です。もし、有理数ではないということが言えたら必然的に無理数であるということが言えたことになります。

他にも「偶数と奇数」や「０と０以外の数」などが有名です。まあ、０と０以外の数なんて言い出したらすべてのものが２種類になってしまいます。「A と A ではない」なので … たた、上記のようなときに背理法を使うことが多いということを覚えておいてくださいね。

【（２）の解答】

$\sqrt{5}$ が有理数であると仮定する。

$\sqrt{5} = \dfrac{n}{m} \cdots ①$ $(m, n$ は互いに素な正の整数$)$

① の両辺に m をかけて、さらに両辺を２乗する。

$5m^2 = n^2$ となる。m^2 は整数より、$5m^2$ は５の倍数である。よって、n^2 も５の倍数。
⇑ 左辺の $5m^2$ が５の倍数です。左辺と右辺が等しいので、右辺の n^2 も５の倍数ですよ。

n^2 が５の倍数である。（１）より、このとき n も５の倍数となる。

l を整数として、$n = 5l$ と表せる。$n = 5l$ を $5m^2 = n^2$ に代入して整理すると $m^2 = 5l^2$ となる。

l^2 は整数より $5l^2$ は５の倍数である。従って、m^2 も５の倍数となる。

（１）より m^2 が５の倍数のとき、m は５の倍数である。

n も m も５の倍数である。ところが、これは m, n が互いに素な正の整数ということに矛盾する。
⇑ 互いに素とは、「１以外に公約数をもたない」ことです。両方とも５の倍数ということは、５を公約数と持つので、互いに素ではありません。

よって、$\sqrt{5}$ は無理数である。（証明終）

【注】
今回の証明はホントに超が付くくらいの頻出ですよ。パッと思い出してみても、筑波や千葉（だったかな？）と言った難関大学でも、出題されています。

他にもいろいろな難関大学で、ここ最近でも受験によく出てきています。必ず解法を覚えておいてくださいね。

さて、上記ですが、たまに納得しない人がいます。$\frac{n}{m}$ で、m と n がともに５の倍数だから矛盾と言っています。ところが、例えば $m = 15, n = 10$ のとき $\frac{n}{m} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$。このとき有理数となるので矛盾してないんじゃないの？なんて思う人がいます。

でも、今回「矛盾」しているのはその部分ではないんです。今回の場合、「$\sqrt{5} = \frac{n}{m} \cdots ①$ (m, n は互いに素な正の整数)」としたんだよね。

「もし、有理数だったら分母と分子が互いに素なもののみであらわせる」という事実があるよね。どんな分数であったとしても、約分して既約分数（約分しきった分数）で表せるとしたら、分母と分子は互いに素となります。

今回の場合、そのことを既知として「$\sqrt{5} = \frac{n}{m} \cdots ①$ (m, n は互いに素な正の整数)」としました。上記(「m, n は互いに素な正の整数」の部分)を満たしていないとダメです。でも、m と n がともに５の倍数だったら上記を満たしていないよね。だから、矛盾します。

＊かえって分かりにくくなった人もいるかもしれません。もし、わからなければ丸暗記して解いてください。そうすれば満点を取ることができますよ。

＊僕は「よくわからなければ暗記してください」と言います。まあ、今回の問題でも、「暗記していたら解答はかけて満点をとることができる」のでそれで OK としています。

まじめな人からは「それでは数学を理解できた訳ではない。少し難しくなると間違えてしまう」と思う人がいます。確かにその意見はもっともです。

でも、僕が「分からなかったら暗記でいいよ」と言っているホントの意味は以下にあります。

「分からない問題」は今の段階ではどんなに考えても分からないんですよね。そこで、「数学は考えることが重要だ！」なんてうんうんうなりながら勉強をする人がいます。

でも、それではいつまでたってもできるようにならない。例えば５０センチしかジャンプできない人が１メートルのハードルをジャンプしようと頑張ること、残念だけどいつまでとっても飛び越えることはできません。

なら、とりあえずその部分は暗記にします。それで、先の方に進めていきます。そうすると、自然と数学の力が上がってきます。そうこうしているうちに、かつては暗記で解いていたはずの問題を理解して解けるようになってきます。

この意見に賛同しない人がいます。でも、「分からないものはいくら考えても分からない」ですよ。自分では勉強をしていると思っても、それではまったく成長しません。もし、本気でできるようになりたいのなら、自分の考えを改めるようにしてくださいね。

【別解について】

$\sqrt{5}$ が無理数であることの証明は、解答にように書くことが多いので上記の解法で解きました。ですが、以下のように「素因数分解の一意性」を使って解く方法もありますよ。

みんな素因数分解は知っているよね。例えば、$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ と素数のいくつかの積で表すことです。まあ、当たり前なんだけど 360 を素因数分解しなさいと言われたら上記のようになるしかないよね。だから、この 1 通りです。

素因数の一意性とは上記の通りです。「どんな正の整数であったとしても素因数分解の仕方は 1 通りしかないですよ」ということです。

「何、当たり前のこと言ってんの？」と思う人もいると思います。でも、これは数学的にはとっても重要で大学受験では整数問題のところでよく使う知識です。高校数学の範囲では上記は証明なしで使います。「まあ、そうだよね」と納得しておいてもらったらいいですよ。

では、このことを使って解いていくことにします。$5m^2 = n^2$ です。n の素因数 5 の個数を l 個ともでします。

⇑「素因数 5 の個数って何？」と思う人もいます。でも、これって簡単。さっきの 360 だったら、$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ と素因数分解できるよね。

このときだったら、「素因数 2 の個数は 3 個、素因数 3 の個数は 1 個、素因数 5 の個数は 1 個」です。もうルールは分かったよね。こんな書き方をすることがあるので気を付けてってくださいね。

n の素因数 5 の個数が l 個のとき n^2 の素因数 5 の個数は $2l$ 個です。

他方、m の素因数 5 の個数を k 個とでもします。m^2 の素因数 5 の個数は $2k$ 個です。$5m^2$ の素因数 5 の個数は $2k+1$ 個です。

で、$5m^2$ の素因数 5 の個数は $2k+1$ 個と奇数です。n^2 の素因数 5 の個数は $2l$ と偶数です。奇数と偶数が同じになることはないので、左辺の $5m^2$ と右辺の n^2 の素因数 5 の個数は一致しません。

でも、素因数分解の一意性より、素因数分解したときの素因数の個数はすべて等しくないとダメなんだよね。だから、矛盾します。

上記の証明の方がしっくりくる人も多いと思います。ちなみに、この答えは「互いに素」は必要ないので $\sqrt{5} = \dfrac{n}{m}$ で、n, m は正の整数、としておいてもらったらいいですよ。

たまに、n, m ともに負の整数、だったらダメですか？と聞かれることがあります。別に OK ですよ。でも、正の方が扱いやすから正としただけです。

「そんな勝手なことしていいの？」と納得しない人がいるかもしれません。でも、OK なんです。

例えば、どんな正の分数でも m, n を（任意の）正の整数として $\dfrac{n}{m}$ で表すことができるよね ($\leftarrow$ 正の分数だったらどんなものでも、$\dfrac{n}{m}$ と表せる正の数 m, n が存在します)。負の数のときも、同じです。例えば $\dfrac{2}{5}$ だったら $n = -2, m = -5$ としたら $\dfrac{n}{m}$ で表すことができます。

最後の部分少し分かりにくかったかもしれません。僕の表現が稚拙で申し訳ありません。ただ、「まあ、そうなのかな？」なんて表現は悪いけど、薄っぺらい理解で十分ですよ。

薄っぺらい理解でも、それを何度も繰り返すことによって次第に濃くなってきます。最初から、すべてを理解するというスタンスでは難しいことが多いです。

「一生懸命考えて解いているのに、なぜかできるようにならないな」という人は、このあたりのことを意識しながら勉強を進めていけばよいと思いますよ。頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司