

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

- 1から20までの整数が1つずつ書かれた20枚のカードがある。次の問いに答えよ。
- (1) 2枚のカードを同時に取り出すとき、取り出した2枚のカードの整数の和が3の倍数になる確率を求めよ。
 - (2) 17枚のカードを同時に取り出すとき、取り出した17枚のカードの整数の和が3の倍数になる確率を求めよ。

【問題（1）の解説】

和が3の倍数になる問題です。この和が3の倍数となる問題はよく出てくるので覚えておいてくださいね。

それでは、問題に戻ります。今回の場合1から20までの数字で2個の和が3の倍数となるようなものを探したいんだよね。

もちろん、和が3となる組み合わせは1と2、和が6となる組み合わせが1と5、2と4などと考えていってもOKです。ただ、少し多いよね。(1)だったらまだ考えられるかもしれないけど、(2)では大変です。

そこで、以下のように考えていきます。1から20を3つに分けることにするね。

$A_0 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, $A_1 = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}$, $A_2 = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\}$ と3つに分けました。何を元に分けたのかと言うと、 A_0 は3の倍数、 A_1 は3で割って1余る数、 A_2 は3で割って2余る数です。

こうすると、非常に簡単に考えることができます。

2個の和の3の倍数で余り0となるのは、「2個とも3の倍数」または「1個が3で割って1余る数で、もう1個が3で割って2余る数」です。この2パターンのときのみ2個の和の3の倍数で余りが0となってくれます。

【問題（1）の解答】

1から20までの整数を3で割ったときの余りによって、次の3つに分ける。

$$A_0 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}, A_1 = \{1, 4, 7, 10, 13, 16, 19\}, A_2 = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\}$$

2個の和が3の倍数となるのは、2個とも A_0 から選ぶ場合と2個のうち1個を A_1 からそして残る1個を A_2 から選ぶ場合である。

$$\text{よって、求める確率は } \frac{{}_6C_2 + {}_7C_1 \cdot {}_7C_1}{{}_{20}C_2} = \frac{\frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} + 49}{\frac{20 \cdot 19}{2 \cdot 1}} = \frac{32}{95}$$

*上記の ${}_6C_2$ は、 A_0 の6個から2個を取り出す場合の数です。また、後半の ${}_7C_1 \cdot {}_7C_2$ は、 A_1 から1個、 A_2 から1個取り出す場合の数です。

「 A_1 から1個取り出す」そして「 A_2 から1個取り出す」と考えると、かけ算で考えることができます。

【注】

上記の、「そして、はかけ算」の意味が分からない人は、以下のプリントで場合の数の勉強をしてください。少し量が多いですが、以下の7つのプリントをすれば場合の数の基本的な考えがすべて身につきます。

場合の数（その1）「場合の数の考え方」 <https://www.hmg-gen.com/baai1.pdf>

場合の数（その2）「順列の考え方」 <https://www.hmg-gen.com/baai2.pdf>

場合の数（その3）「同じ文字を含む順列の問題」 <https://www.hmg-gen.com/baai3.pdf>

場合の数（その4）「最短経路とリンゴの個数に関する問題」 <https://www.hmg-gen.com/baai4.pdf>

場合の数（その5）「円順列」 <https://www.hmg-gen.com/baai5.pdf>

場合の数（その6）「組み分けに関する問題」 <https://www.hmg-gen.com/baai6.pdf>

場合の数（その7）「その他の門d内」 <https://www.hmg-gen.com/baai7.pdf>

【問題（２）の解説】

（１）は２枚のカードの和でした。これなら、工夫は少し必用でした。ですが、直接考えることができました。

でも、この（２）は１７枚のカードの和です。頑張ったらできないことないかもしれないけど、すごい大変そうだよ。

場合の数で、直接求めることが難しいときは他のもっとうまく求められる方法があることが多いです。直接求めることができないとき、余事象を使って解くことが多いです。

今回の場合、「１７枚のカードの和が３の倍数ではない」と余事象を考えても難しそうです。だから、余事象を使って解くことはないです。

そこで、どうしようかな？と考えます。

*この考えるということが重要です。バカ正直に直接求めたら大変すぎるよね。だから、「もっと他によい方法があるはず」と頭に叩き込みます。

そうしたうえで、いろいろと考えると「こうやって解くのかな？」と思いつけるようになりますよ。

今、「いろいろと考える」と言いました。でも、数学の解法ってそんな何種類もある訳ではないです。だから、問題数をこなしていけば、自然とできるようになってきますよ。頑張ってくださいね。

今回１から２０なんだよね。この数の総和は $\frac{20}{2}(1+20) = 210$ です。

↑ 総和は、等差数列の和の公式を使いました。 $1+2+3+\dots+20$ は初項１、公差１の等差数列初項から第２０項までの和で、等差数列の和の公式 $S = \frac{(\text{項数})}{2}((\text{初項}) + (\text{末項}))$ の公式を使いました。数列をまだ勉強していない人は、 $1+2+3+\dots+20$ は、 $1+20=21$, $2+19=21$, $3+18=21 \dots$ と２１が１０個あるので和が２１０となると考えてください。

今回１７個の和が３の倍数なんだけど、選んだほうの１７個に着目するのではなくて、選ばなかった３個の方に着目します。

1 から 20 までの和が 3 の倍数で、選んだ 17 個の和が 3 の倍数ということは、選ばなかった 3 個の和が 3 の倍数となるよね。

また、少し考えたら分かると思うけど、17 個を選ぶ場合の数と、選ばなかった 3 個の場合の数は一致しますよ。

こうすれば解くことができます。

【問題（2）の解答】

$1+2+3+\dots+20=210$ と 1 から 20 までの総和は 3 の倍数である。取りだした 17 枚のカードの和が 3 の倍数のとき、取り出さなかった 3 枚のカードの和も 3 の倍数となる。

取りださなかった 3 枚のカードの場合の数と、取り出した 17 枚のカードの場合の数は一致する。以下、取り出さなかった 3 枚のカードで考える。

取りださなかった 3 枚のカードが 3 の倍数となるのは、「3 枚とも A_0 から取り出す」「3 枚とも A_1 から取り出す」「3 枚とも A_2 から取り出す」「 A_0, A_1, A_2 からそれぞれ 1 枚取り出す」の 3 つの場合である。

***この考えがよく出てきますよ。3 個の整数の和が 3 の倍数となる組み合わせは、上記であることは少し考えたら分かると思います。しっかりと理解しておいてくださいね。**

「3 枚とも A_0 から取り出す」場合の数は ${}_6C_3 = 20$ 通り。「3 枚とも A_1 から取り出す」と「3 枚とも A_2 から取り出す」場合の数は、ともに ${}_7C_3 = 35$ 通り。「 A_0, A_1, A_2 からそれぞれ 1 枚取り出す」場合の数は ${}_6C_1 \cdot {}_7C_1 \cdot {}_7C_1 = 294$ 通り。

よって、取りださなかった 3 枚のカードの和が 3 の倍数となる場合の数は $20+35+35+294 = 384$ 通り。

以上より、求める確率は $\frac{384}{{}_{20}C_{17}} = \frac{32}{95}$

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦勞はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司