「自宅に居ながら 1 対 1 の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

(1) 自然数 x, y は、$1 < x < y$ および

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3}$$

をみたす。x, y の組をすべて求めよ。

(2) 自然数 $x < y < z$ は、$1 < x < y < z$ および

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{12}{5}$$

をみたす。x, y, z の組をすべて求めよ。

【問題（１）の解説】

整数問題です。整数問題は、いろいろと考えて解いていかないといけないものが多く大変です。

ただ、いろいろ考えるためには「このときはこうやって解く」という典型問題の解法が頭に入っていないと厳しいです。

だから、典型問題の解法を覚えていってくださいね。これも、典型問題のうちのひとつですよ。まずは、以下のことを覚えておいてください。

整数問題の解法

等式の整数問題では、強引に (整数) $\times$ (整数) $=$ (整数) の形にして解いていく！

＊ (整数) $\times$ (整数) $=$ (整数) としましたが、左辺の整数は文字式で右辺の整数は数字とい

うことが多いです。また、例外がないとは言いませんが、この式変形をするのは文字の種類が２種類のときが多いです。

今回の場合、x, y と文字は２種類です。（２）のように文字の種類が３種類のときは、この解き方以外の解法で解くことが多いです。もちろん、例外もありますよ。

なぜ、(整数) × (整数) = (整数) の形にするのかというと、整数どうしをかけあわせてとある整数になる組み合わせは高々しれているからです。

例えば、$mn = 6$ となるとき、m, n が整数でなければ、ふたつをかけて６になるものはいくらでもあります。ですが、整数どうしだと $(1,6), (2,3), (3,2), (6,1)$ としれています。今は、符号は考えませんでした。符号を考えたとしても数はしれています。だから、(整数) × (整数) = (整数) にして解いていきます。

【問題（１）の解答】

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)=\frac{5}{3}$$

$$1+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+\frac{1}{xy}=\frac{5}{3}$$ ◀ 左辺を展開した！

$$3xy+3x+3y+3=5xy$$ ◀ 両辺に $3xy$ をかけて、分数をなくした！

$$2xy-3x-3y=3$$

$$x(2y-3)-3y=3$$ ◀ 左辺を x で整理した！

＊ここからは、超と言ってよいほどの強引な式変形です。さっき話したように、今の目的は (整数) × (整数) = (整数) とすることです。

こうするためには、左辺が因数分解されないといけません。そこで、左辺が $(2y-3)$ を共通因数にもつように強引に変形します。$-3y=-\frac{3}{2}(2y-3)-\frac{9}{2}$ と強引に変形をすれば $(2y-3)$ を共通因数としてもつので、因数分解できます。

$$x(2y-3)-\frac{3}{2}(2y-3)-\frac{9}{2}=3$$

$$x(2y-3)-\frac{3}{2}(2y-3)=\frac{15}{2}$$

$$2x(2y-3)-3(2y-3)=15$$

$$(2x-3)(2y-3)=15$$ ◀ (整数) × (整数) = (整数) の形になった！

＊あとは、ふたつの整数をかけて 15 になるものを探していきます。ただ、$1 < x < y$ より、多少限定することができます。

$1 < x < y$ のすべての辺に２をかけたあと、全ての辺に３を加えると、$-1 < 2x-3 < 2y-3$ となる。

よって、$(2x-3)(2y-3) = (1, 15), (3, 5)$ に限る。
⇑ ２数をかけて１５で、かつ $-1 < 2x-3 < 2y-3$ を満たすものは、上記の２種類です。

これより $(x, y) = \mathbf{(2, 9), (3, 4)}$

【問題（２）の解説】

今回は、（１）と違い等式に含まれている文字の種類が x, y, z の３種類です。１００パーセントない訳ではありませんが、こういうときは (整数) × (整数) = (整数) と変形できないことが多いです。

だから、(整数) × (整数) = (整数) 以外の解法で解いていかないといけません。

＊整数問題は、あらゆる知識を総動員して範囲を絞っていきますよ。今回も、「なんとかして範囲を絞ることはできないかな？」と考えます。

「どうしようかな？」と思うんだけど、そこで $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{12}{5}$ をよく見ます。

x の値が大きくなるほど $1+\frac{1}{x}$ の値は小さくなるよね。他の $1+\frac{1}{y}, 1+\frac{1}{z}$ の方も同じです。

で、x, y, z の値が大きくなると $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)$ の値は小さくなる。

もちろん小さくなりすぎると、３つをかけて $\frac{12}{5}$ となることはないよね。

だから、この時点でx, y, zはそれほど大きな数ではないと予想できます。さらに$1 < x < y < z$が成立しているのだから、x, y, zの中でも一番小さなxは大きくはないと予想できます。

⇑ こんな発想なかなか出てこない。聞いたら、「そうかな？」と思うけど、自分ではなかなか思いつけない！なんて言う人もいます。確かにそうだよね。

最初のうちは、みんなそんな感じですよ。「整数問題は、こういうふうにして範囲を絞ることがある」と頭に入れておけば、次第に気づけるようになってきますよ。単に慣れていないだけ、だから問題に慣れていってくださいね。

xは、それほど大きくない数です。$1 < x < y < z$よりxは2以上の自然数です。$x = 2$が不適だと答えがなくなってしまいます。だから、$x = 3$で確かめていきます。

$1 < x < y < z$です。$x = 3$で$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)$の値が一番小さくなるのは、$x = 3, y = 4, z = 5$のときです。

このとき、$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5} = 2$となります。で、2は$\frac{12}{5}$より小さいよね。$x, y, z$は値が大きくなると、$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)$の値としては小さくなります。

その$x = 3$のとき、$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)$のとりうる一番大きな値が2ということです。

これは、$\frac{12}{5}$より小さいです。よって、$x = 3$のとき$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) = \frac{12}{5}$となることはありません。

＊ $x = 3$を代入したのはテキトウですよ。ただ、$x = 2$が不適だと解けないから、次の$x = 3$を入れただけです。もし、$x = 3$でもOKそうなら、次は$x = 4$をやってみます。このあたりは、実際にやってみないとわかりません。もし、試験で出てきたら余白で確認してからやっていきます。

これで $x=2$ ということがわかりました。あとは、$x=2$ を等式に代入をして（１）と同じように解いていけばいいですよ。

＊（１）のときも、範囲を絞る方法で解くこともできます。ただ、文字が２種類のときは (整数) $\times$ (整数) $=$ (整数) にもっていった方がラクかな？と思っただけです。好きな解き方で大丈夫です。

【問題（２）の解説】

$x \geqq 3$ のとき、$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right) \leqq \dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{6}{5} = 2 < \dfrac{12}{5}$ である。

よって、$x \geqq 3$ のとき不適。なので、$x=2$ に限る

$x=2$ を $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{12}{5}$ に代入する。

$$\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) &= \frac{12}{5} \\
\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) &= \frac{12}{5} \\
\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right) &= \frac{8}{5} \\
1+\frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{yz} &= \frac{8}{5} \\
5yz+5y+5z+5 &= 8yz \quad \text{◀ 両辺に } 5yz \text{ をかけて、分数をなくした！} \\
3yz-5y-5z &= 5 \\
(3z-5)y-5z &= 5 \quad \text{◀ 左辺は } y \text{ で整理した！} \\
(3z-5)y-\frac{5}{3}(3z-5) &= 5+\frac{25}{3} \quad \text{◀ 強引に共通因数 } 3y-5 \text{ を作った！} \\
(3z-5)\cdot 3y-5(3z-5) &= 15+25 \quad \text{◀ 両辺に 3 をかけた！} \\
(3y-5)(3z-5) &= 40 \quad \text{◀ (整数)} \times \text{(整数)} = \text{(整数) の形になった！}
\end{aligned}$$

$2<y<z$ より、$1<3y-5<3z-5$ となるので、$(3y-5, 3z-5) = (2,20), (4,10), (5,8)$ に限る。

この中で y, z が整数となるのは $(3y-5, 3z-5) = (4, 10)$ のみで、このとき $(y, z) = (3, 5)$ となる。

以上より、$(x, y, z) = \mathbf{(2, 3, 5)}$

（１)、（２）ともに、x, y, z の組をすべて求めよ、と言っているのに答えは 1 個しかありませんでした。まあ、こんなこともあります。

ただ、計算間違いをしている可能性もあるので、より丁寧に確認をするようにしてくださいね。

今回の問題は、一橋大学の過去問です。一橋大学の過去問ではありますが、典型的な問題で絶対に解けないとダメな問題ですよ。

整数問題は、とにかく範囲を絞っていくことがポイントです。範囲の絞り方は、いくらでもあります。ただ、ごくごく一部の難問を除いて、範囲の絞り方はいくつかの方法で決まっています。

今回もそういった、知っていれば簡単に解ける問題ですよ。それでは、頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司