

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

a を実数とする。このとき、方程式 $||x^2 - 2x - 3| - a| = 2$ の実数解の個数を求めよ。

【問題の解説】

絶対値がらみの問題です。絶対値の問題は苦手になっている人が多いです。でも、受験によく出てくるのでしっかりと理解しておいてくださいね。

絶対値の解き方としては、①絶対値の中身が0以上か0未満かで場合分け、または②同値変形など数式のまま解くのいずれかの解法で解いていくことが多いです。

今回は、まずは以下の変形を使って解いていきます。

絶対値の変形

$$B \geq 0 \text{ のとき、} |A| = B \Leftrightarrow A = \pm B$$

たまに、 B が0以上と分かっていないのに、 $|A| = B$ を $A = \pm B$ とする人がいます。でも、これはダメですよ。気を付けてくださいね。 $|A| = B$ を $A = \pm B$ とするには、 $B \geq 0$ が必要です。

ちなみに B が0以上かどうか分からないときに出てきた場合は、 $B \geq 0$ のときと $B < 0$ のときで場合分けをして解いていきます。

$B \geq 0$ のときは $|A| = B$ は $A = \pm B$ となり、 $B < 0$ のとき $|A| = B$ は不適です。だって絶対値って数直線上における原点からの距離なんだよね。距離は0以上。だから、左辺の

$|A|$ は0以上です。一方、右辺の B は0未満です。このとき、左辺と右辺の値が等しくなることはないので、不適です。

また、絶対値で先ほどの同値変形と間違えやすい以下のものがあります。

$$|A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$$

*上記は、 A や B が0以上などの条件はないです。どんな場合でも、 $|A| = |B| \Leftrightarrow A = \pm B$ が成立します。これも間違えやすいので気を付けてくださいね。

では、問題に戻ります。今回の場合 $||x^2 - 2x - 3| - a| = 2$ と右辺が2で0以上だよ。だから、 $||x^2 - 2x - 3| - a| = 2 \Leftrightarrow |x^2 - 2x - 3| - a = \pm 2$ と変形できます。

ここから、 $|x^2 - 2x - 3| = a \pm 2$ となります。もう、ここからは分かるよね。ここからは、定数分離の解法と同じですよ。方程式の実数解の個数はグラフの共有点の個数と一致します。

$|x^2 - 2x - 3| = a \pm 2$ は、 $|x^2 - 2x - 3| = a + 2$ または $|x^2 - 2x - 3| = a - 2$ なので、それぞれの実数解の個数を求めていってもかまいません。

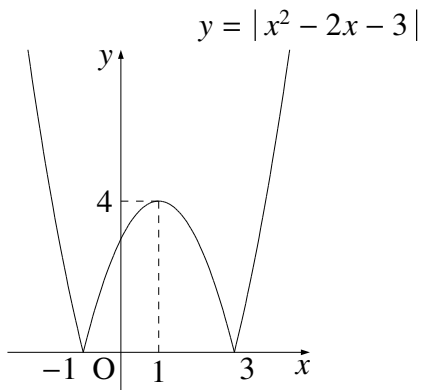
ただ、このくらいなら一気に両方とも考えていくことにします。 $|x^2 - 2x - 3| = a \pm 2$ の実数解の個数は、 $y = |x^2 - 2x - 3|$ のグラフと2直線 $y = a \pm 2$ の共有点の個数と一致するよね。それでは、解答に進みます。

【問題の解答】

$$||x^2 - 2x - 3| - a| = 2 \Leftrightarrow |x^2 - 2x - 3| = a \pm 2$$

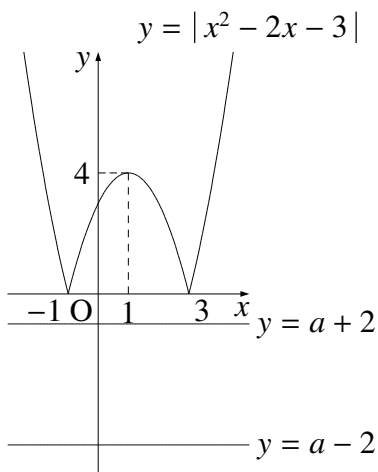
よって、方程式 $|x^2 - 2x - 3| - a = 2$ の実数解の個数は、 $y = |x^2 - 2x - 3|$ と2直線 $y = a \pm 2$ の共有点の個数と一致する。

$y = |x^2 - 2x - 3| = |(x-1)^2 - 4|$ であり、 $|x^2 - 2x - 3| = 0$ を解くと、 $x = -1, 3$ であることより、 $y = |x^2 - 2x - 3|$ のグラフは以下のようなになる。



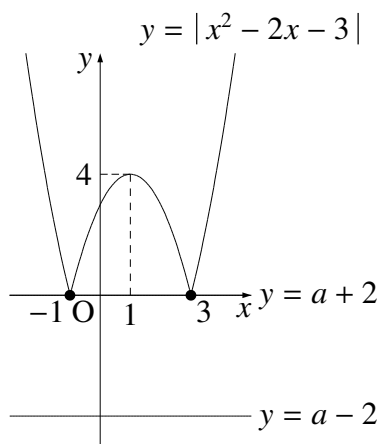
*ここから、2直線 $y = a \pm 2$ との共有点で考えていきます。 $(a+2) - (a-2) = 4$ より差が4あることに注意しながら場合分けをする必要があります。

(i) $a+2 < 0$ つまり、 $a < -2$ のとき



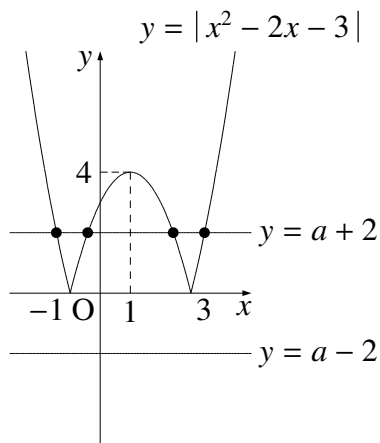
上図のように、 $y = |x^2 - 2x - 3|$ のグラフと2直線 $y = a \pm 2$ の共有点の個数は0個。よって、方程式 $|x^2 - 2x - 3 - a| = 2$ の実数解の個数は0個。

(ii) $a + 2 = 0$ つまり $a = -2$ のとき



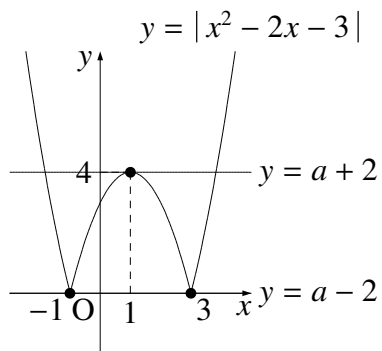
上図のように、 $y = |x^2 - 2x - 3|$ のグラフと 2 直線 $y = a \pm 2$ の共有点の個数は 2 個。よって、方程式 $|x^2 - 2x - 3 - a| = 2$ の実数解の個数は 2 個。

(iii) $0 < a + 2 < 4$ つまり $-2 < a < 2$ のとき



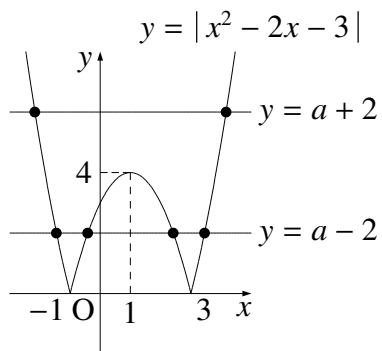
上図のように、 $y = |x^2 - 2x - 3|$ のグラフと 2 直線 $y = a \pm 2$ の共有点の個数は 4 個。よって、方程式 $|x^2 - 2x - 3 - a| = 2$ の実数解の個数は 4 個。

(iv) $a + 2 = 4$ つまり $a = 2$ のとき



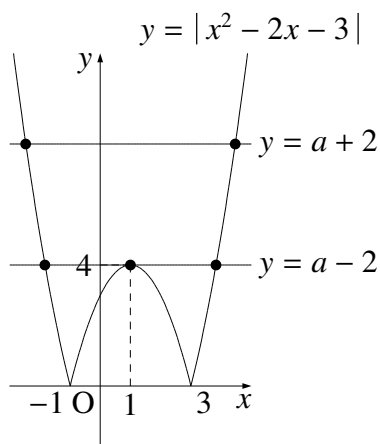
上図のように、 $y = |x^2 - 2x - 3|$ のグラフと 2 直線 $y = a \pm 2$ の共有点の個数は 3 個。よって、方程式 $|x^2 - 2x - 3 - a| = 2$ の実数解の個数は 3 個。

(v) $0 < a - 2 < 4$ つまり $2 < a < 6$ のとき



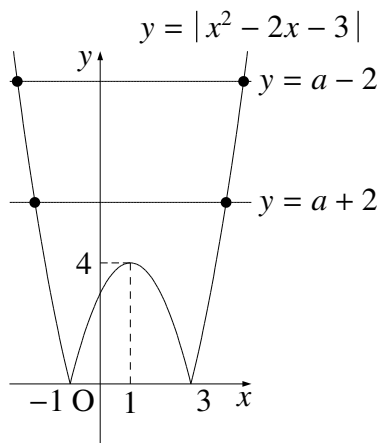
上図のように、 $y = |x^2 - 2x - 3|$ のグラフと 2 直線 $y = a \pm 2$ の共有点の個数は 6 個。よって、方程式 $|x^2 - 2x - 3 - a| = 2$ の実数解の個数は 6 個。

(vi) $a - 2 = 4$ つまり $a = 6$ のとき



上図のように、 $y = |x^2 - 2x - 3|$ のグラフと 2 直線 $y = a \pm 2$ の共有点の個数は 5 個。よって、方程式 $|x^2 - 2x - 3 - a| = 2$ の実数解の個数は 5 個。

(vii) $a - 2 > 4$ つまり $a > 6$ のとき



上図のように、 $y = |x^2 - 2x - 3|$ のグラフと 2 直線 $y = a \pm 2$ の共有点の個数は 4 個。よって、方程式 $|x^2 - 2x - 3 - a| = 2$ の実数解の個数は 4 個。

以上より、方程式 $|x^2 - 2x - 3 - a| = 2$ の実数解の個数は、 $a < -2$ のとき 0 個、 $a = -2$ のとき 2 個、 $-2 < a < 2$ のとき 4 個、 $a = 2$ のとき 5 個、 $2 < a < 6$ のとき 6 個、 $a = 6$ のとき 5 個、 $6 < a$ のとき 4 個となる。

今回の問題のように絶対値がらみの問題はたまに出題されます。しっかりと理解しておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司