

「自宅に居ながら 1 対 1 の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を 70 にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

x, y を自然数とする。

(1) $\frac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ。

(2) $\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y}$ が自然数であるような組 (x, y) をすべて求めよ。

【問題（１）の解説】

すっきりした問題です。ですが、北海道大学の文系学部の過去問ですよ。決して簡単ではありません。北大レベルを目指す人は、このレベルの問題を解けるようになっておい

てくださいね。
整数の単元の問題は、あれこれといろいろなことを考えて答えを出すしかありません。いろいろと考えると言いました。まさに、いろいろで問題ごとに、自分の知識を総動員をして考えていきます。

ただ、問題によっては「このときは、こうする」と決まりきったものもあります。今回もその類の問題です。まずは、以下を覚えておいてくださいね。

整数となる条件

m, n は整数である。このとき、 $\frac{n}{m}$ が整数となるためには、 $|n| \geq |m|$ が必用である。

上記は、少し考えたらあきらかだよ。分母の絶対値の方が分子の絶対値より値が大きいとき、その分数は絶対に整数とならないよね。

分数が整数となるためには、分子の絶対値の方が分母の絶対値より大きい（あるいは等しい）必要があります。

これは、必要条件ですよ。分子の絶対値の方が分母の絶対値より大きくても、分数が整数に必ずなるなんてことはありえないよね。

*整数問題は、このように必要条件で範囲を絞ります。範囲を絞ってから、あとはすべてのものをしらみつぶしに調べていくということが多いですよ。これが整数問題の常套手段。覚えておいてくださいね。

で、普段だったら絶対値で考えないといけないんだけど、今回の場合、自然数と言っています。だから、絶対値はとれて、(分子) $\geq$ (分母) となる必要がありますよ。

これで、 x を限定できます。後は、しらみつぶしに代入をして解いていくだけです。

【問題（１）の解答】

x は自然数であるので、 $\frac{3x}{x^2+2}$ の分母・分子ともに正の数である。

$\frac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるとき、 $3x \geq x^2+2$ が必用である。

$$3x \geq x^2 + 2$$

$$x^2 - 3x + 2 \leq 0$$

$$(x-1)(x-2) \leq 0$$

$$1 \leq x \leq 2$$

x は自然数なので、 $x = 1, 2$ に限る。

* $x = 1, 2$ が必要条件。あとは、 $x = 1$ と $x = 2$ のときのそれぞれで本当に整数となっているかという十分性を確認していきます。

$x = 1$ のとき、 $\frac{3x}{x^2+2} = \frac{3 \cdot 1}{1^2+2} = \frac{3}{3} = 1$ と自然数となるので、適する。

$x = 2$ のとき、 $\frac{3x}{x^2+2} = \frac{3 \cdot 2}{2^2+2} = \frac{6}{6} = 1$ と自然数となるので、適する。

以上より、 $x = 1, 2$

*今回は必要条件で求めたものが $x = 1, 2$ です。そして、たまたまけど両方とも答えになってくれています。こういうときもままあります。ただ、当然必要条件で求めたあと、十分条件を考えているということを忘れないようにしてくださいね。

「何、当たり前のこと言ってるの？」なんて思う人もいます。ただ、たまに理解出来ない人もいるのであえて書いておきました。

【問題（２）の解説】

（２）の式を見てみると、（１）と同じ $\frac{3x}{x^2+2}$ があるよね。そこで、以下のことを思い出そうにしてください。

受験問題の考え方

受験問題で、（１）、（２）となっているとき、（２）は（１）を使ったり、ヒントにして解いていくことが多い！

まあ、今回の問題を解く上では上記はそこまで重要ではないかもしれませんが。ただ、問題によっては上記の知識がなければ、絶対に解法を思いつけない問題なんてことも多々ありますよ。

とっても重要な知識なので頭に叩き込んでおいてくださいね。

それでは、問題に進みます。

$\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y}$ が整数と言っています。左側の $\frac{3x}{x^2+2}$ が整数だったら、右側の $\frac{1}{y}$ が整数としないと、 $\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y}$ が整数となることはないよね。

だから、 $\frac{1}{y}$ は整数です。で、 $\frac{1}{y}$ が整数となる自然数 y は 1 に限られます。

もう一方の $\frac{3x}{x^2+2}$ が整数でない場合を考えていきます。

*こっちの方が難しいです。整数問題は、決まった解法がないことが多いです。そんなとき、あれやこれやと自分自身で実験をして解いていくしかないですよ。

整数でない場合、まず $\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y}$ を通分するのかな？なんて思います。でも、やってみたら分かると思います。通分しても複雑すぎるので、この解法は違うかな？と感じます。

そこで、違う解法を考えていきます。今回の場合、 x, y は自然数です。自然数の場合、当たり前だけど正なんだよね。

自然数の場合、正という条件があるので、この条件を使って範囲を絞って考えることが多いです。

そこでどうやって考えようかな？と思います。 $\frac{3x}{x^2+2}$ の方も分母分子を x で割るなどしたら範囲を出すことができます。ですが、 $\frac{1}{y}$ の方が範囲を簡単にらせそうなので、こちらで考えていきます。

今、 y は自然数なんだよね。で、今回は $\frac{1}{y}$ が整数でないときを考えています ($\frac{3x}{x^2+2}$ が整数でないときを考えています。仮に、 $\frac{1}{y}$ が整数だと $\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y}$ は整数となり得ません。だから、 $\frac{1}{y}$ は整数ではない)。

y が自然数で、 $\frac{1}{y}$ が整数となるのは $y = 1$ に限るので、今回の場合 1 を除く自然数つまり $y \geq 2$ です。

このとき、 $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$ です。

$\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y}$ が整数となるには、 $\frac{3x}{x^2+2} \geq \frac{1}{2}$ である必要があるよね。 $\frac{1}{2}$ 以下のものにある数を加えて自然数となるには、そのある数は $\frac{1}{2}$ 以上でないといけません。そうじゃないと、和が 1 未満で。自然数となりようがありません。もちろん、和が 1 以上は自然数となるための必要条件ですよ。

* こういうことを言うと、「確かに言われたら分かるけど、なかなか思いつけない」と言

う人がいます。

確かにその通りだよね。思いつくのは難しいです。ただ、整数問題の範囲を絞る方法はあまりないんです。絞る方法をこういった問題を通して覚えていってもらったら大丈夫ですよ。

そして、問題を解くときはとにかくやってみる。やってみてうまくいけばOKだし、うまくいかなければ別の解法を考えます。そうやって問題慣れしていけば、受験問題の難しい問題でも自分一人だけで解けるようになりますよ。がんばってくださいね。

$\frac{3x}{x^2+2} \geq \frac{1}{2}$ を変形すると $x^2 - 6x + 2 \leq 2$ となります。これをみたす自然数 x は $x = 3, 4, 5$ にがります。あとは、これをしらみつぶしに解いていけばよいだけです。それでは、解答に進みます。

【問題（２）の解答】

(I) $\frac{3x}{x^2+2}$ が自然数のとき

$\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y}$ が自然数となるには $\frac{1}{y}$ が自然数となるときである。

$\frac{1}{y}$ が自然数となる自然数 y は $y = 1$ のみである。

(1) より、 $\frac{3x}{x^2+2}$ が自然数となるのは $x = 1, 2$ のときであるので、 $(x, y) = (1, 1), (1, 2)$ のとき $\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y}$ が自然数となる。

(II) $\frac{3x}{x^2+2}$ が自然数でないとき

$\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y}$ が自然数となるには $\frac{1}{y}$ が自然数ではない。

$\frac{1}{y}$ が自然数でないので $y \geq 2$ である。よって、 $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$ である。

$\frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y}$ が自然数となるには、 $\frac{3x}{x^2+2} \geq \frac{1}{2}$ が必用である。

$$\frac{3x}{x^2+2} \geq \frac{1}{2}$$

$6x \geq x^2 + 2$ ◀ 両辺に $2(x^2+2)$ をかけた！ $2(x^2+2) > 0$ より、不等式の向きは不変！！

$$x^2 - 6x + 2 \leq 0$$

$$(x-3)^2 - 7 \leq 0$$

*上記の不等式を解くには解の公式が必要です。もちろん、解の公式を使っても解くことはできます。ですが、今回 x は自然数です。平方完成すると $(x-3)^2 - 7$ です。 $x=3$ のとき最小となるので、あとは $x=1, 2$ を代入するなどして、不等式を満たす自然数 x を直接考えていくという方法で解いています。

$(x-3)^2 - 7 \leq 0$ をみたす自然数 x は $x=1, 2, 3, 4, 5$ である。 $x=1, 2$ のとき (1) より $\frac{3x}{x^2+2}$ は自然数である。自然数でないときなので、 $x=1, 2$ は不適。よって、 $x=3, 4, 5$ である。

*これで、 $x=3, 4, 5$ と限定することができました。ここからは、すべて代入をして、しらみつぶしに考えていくだけです。

(ア) $x=3$ のとき

$$\begin{aligned} & \frac{3x}{x^2+2} + \frac{1}{y} \\ &= \frac{3 \cdot 3}{3^2+2} + \frac{1}{y} \\ &= \frac{9}{11} + \frac{1}{y} \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$ より、 $\frac{9}{11} + \frac{1}{y}$ が自然数となるなら、 $\frac{9}{11} + \frac{1}{y} = 1$ に限る。これを解くと、 $y = \frac{11}{2}$ となるが、 y は自然数より不適。

(イ) $x = 4$ のとき

$$\begin{aligned} & \frac{3x}{x^2 + 2} + \frac{1}{y} \\ &= \frac{3 \cdot 4}{4^2 + 2} + \frac{1}{y} \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{y} \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$ より、 $\frac{2}{3} + \frac{1}{y}$ が自然数となるなら、 $\frac{2}{3} + \frac{1}{y} = 1$ に限る。これを解くと、 $y = 3$ となる。

(ウ) $x = 5$ のとき

$$\begin{aligned} & \frac{3x}{x^2 + 2} + \frac{1}{y} \\ &= \frac{3 \cdot 5}{5^2 + 2} + \frac{1}{y} \\ &= \frac{5}{9} + \frac{1}{y} \end{aligned}$$

ここで、 $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$ より、 $\frac{5}{9} + \frac{1}{y}$ が自然数となるなら、 $\frac{5}{9} + \frac{1}{y} = 1$ に限る。これを解くと、 $y = \frac{9}{4}$ となるが、 y は自然数より不適。

よって、 $(x, y) = (4, 3)$ である。

以上より、 $\frac{9}{11} + \frac{1}{y}$ が自然数となる組は、 $(x, y) = (1, 1), (2, 1), (4, 3)$ である。

この問題は、北大の文系学部の過去問です。整数問題は、難しいという人が多いです。確かに難しい単元です。

ただ、ある程度の解法は決まっています。とりあえず典型問題の解法を覚えてください。問題を解くときは、「今まで覚えてきた解法のどれを使って解くのかな？」と実際にやっ

てみるしかありません。

そんなとき、「答えにたどりつく」という根拠はありません。とりあえずやってみるということが重要です。それで解けたら OK だし、解けなければまた他の解法を考えます。めんどくさがらずに、思いついた解法を試してみるというのが整数問題を解くポイントですよ。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4 浪しているのにセンター 6 割」

→ 「わずか入会 8 か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を 70 にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司