「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

n を３以上の整数とし、a, b, c は１以上 n 以下の整数とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) $a < b < c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

(2) $a \leqq b \leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

(3) $a < b$ かつ $a \leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

【問題（１）の解説】

これは、よく出てくるタイプの問題ですよ。覚えておいてくださいね。

$a < b < c$ は、次のように考えることができます。

「１以上 n 以下の異なる n 個の数字から３個を選ぶ」そして「その選んだ３個の数字を小さい方から左から並べ a, b, c とする」

と考えることができます。

「１以上 n 以下の異なる n 個の数字から３個を選ぶ」は ${}_n\mathrm{C}_3$ 通りです。また、「その選んだ３個の数字を小さい方から左から並べ a, b, c とする」これは選んだ３個の数字を小さい順に並べるので並べ方は１通りです。

よって、今回の場合の数は ${}_n\mathrm{C}_3 \times 1$ で求めることができます。でも、普通 $\times 1$ は省略する

ので ${}_n\mathrm{C}_3$ ですよ。

このように、異なる数字を選んで小さい順（あるいは大きい順）に並べる、は組み合わせで考えることができます。知らなかったらその場で思いつくのは難しいよ。覚えておいてくださいね。

【問題（１）の解答】

求める組の個数は、１以上 n 以下の n 個の数字から３個を選ぶ組の個数と等しい。

${}_n\mathrm{C}_3 = \dfrac{\boldsymbol{n(n-1)(n-2)}}{\boldsymbol{6}}$ 通り。

【問題（２）の解説】

（１）と（２）の違いは、不等号にイコールが含まれているかどうかです。

もし、イコールがなければ（１）と同じように考えることができるよね。そこで、(i) $a<b<c$ のとき、(ii) $a=b<c$ のとき、(iii) $a<b=c$ のとき、(iv) $a=b=c$ のとき、と場合分けをしても解くことができます。

やってもらってもいいけど、少しメンドウです。そこで、以下の有名な同値変形を覚えておいてください。

有名な同値変形

m, n が整数のとき

$$\boldsymbol{m \leqq n \iff m < n + 1}$$

上記の同値変形が成立するのは、m, n が整数と言う前提条件があるからね。気を付けてください。

もし、分かんなかったら別にいいけど、なぜ上記が同値になるか話しておきます。

＊「分かんなかったらいい」なんて言いました。まあ、僕もそうだったけど、もともと数学の能力があまり高くない人はすべてを理解しようとするのは難しいです。

こういう部分は理解出来ていなくても、覚えていれば解くことができます。でも、心配しなくていいですよ。こんなやり方であっても、数学の勉強を進めているうちにいつのまにか理解できるようになってきます。

ちょうど、筋トレを頑張った人が以前は重くてまったくもつことができなかったらダンベルをもてるようになる、それと同じような感じです。

分からないと立ち止まっているより、ある程度の理解で進めてどんどんと前に進めてもらった方が、数学の能力はあがってきますよ。

ある程度のところで割り切って、どんどんと進めるようにしてください。

それでは、同値変形に戻ります。まず、p と q が同値とは、$p \to q$ が真かつ $q \to p$ が真であるということです。

今回の場合、$m \leqq n \ \to\ m < n+1$ が真で、かつ、$m < n+1 \ \to\ m \leqq n$ が真であるとき、$m \leqq n$ と $m < n+1$ が同値となります。

まず、$m \leqq n \ \to\ m < n+1$ が真となるかどうかです。これは、成立しています。成立しているのは、簡単に分かると思うので各自考えておいてください（こっちの方は、m,n は整数でなくてもどんな実数でも成立しています）。

次に、$m < n+1 \ \to\ m \leqq n$ です。これは、m,n が整数でないと成立しませんよ。$m < n+1$ とは、整数 m は、整数 n にひとつ加えて整数 $n+1$ よりも値が小さいといっているんだよね。

整数を比べて小さいときとは、左辺と右辺で一番差が小さくなるのは差が 1 のときです。例えば、$2 < 3$ とか $4 < 5$ とか、このとき $2 < 3$ は $2 < 2+1$、$4 < 5$ は $4 < 4+1$ となります。だから、$m < n+1$ が成立しているとき、必ず $m \leqq n$ が成立しています。
⇑ 分かりにくかった人ごめんなさい。少し紙面では説明しにくいです。分かる人は、「ああ、当たり前だよね」と思えると思います。さっきも言いました。もし、分かんなかったら無視してください。無視をしていても、ある程度数学の勉強を進めていけば、そのうち分かるようになりますよ。

$a \leqq b \iff a < b+1$ です。$b \leqq c \iff b < c+1$ です。$b < c+1$ の両辺に 1 を加えると $b+1 < c+2$ です。

このことより、$a \leqq b \leqq c \iff a < b+1 < c+2$ です。

c は n 以下の整数でした。だから、$c+2$ は $n+2$ 以下の整数です。$a < b+1 < c+2$ より、$(a, b+1, c+2)$ の組の個数は ${}_{n+2}\mathrm{C}_2$ です。

当たり前なんですが、$(a, b+1, c+2)$ の組の個数と (a, b, c) の組の個数は一致します。例えば、$(a, b+1, c+2) = (1, 3, 4)$ のとき $(a, b, c) = (1, 2, 2)$ のただ 1 通りです。

こういうふうに、(a, b, c) がひとつ決まれば $(a, b+1, c+2)$ がただひとつ決まり、逆に $(a, b+1, c+2)$ がひとつ決まれば (a, b, c) がただひとつきまるとき、(a, b, c) と $(a, b+1, c+2)$ は 1 対 1 に対応する、ということがあります。

【問題（２）の解答】

a, b, c が整数のとき、$a \leqq b \leqq c \iff a < b+1 < c+2$ となる。

$(a, b+1, c+2)$ の組の個数は、 1 以上 $n+2$ 以下の整数から 3 個の数字を選ぶ組の個数と等しい。よって、$(a, b+1, c+2)$ の組の個数は ${}_{n+2}\mathrm{C}_3 = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 個である。

また、(a, b, c) の組の個数と $(a, b+1, c+2)$ の組の個数は一致するので、(a, b, c) の組の個数は $\boldsymbol{\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}}$ 通りである。

【問題（２）の別解の解説】

これには、有名な別解があり。重複組み合わせというものです。

重複組み合わせ

異なる n 個のものから重複をゆるして r 個を選ぶ場合の数は ${}_n\mathrm{H}_r = {}_{n+r-1}\mathrm{C}_r$ である。

今回の場合、$n = 5$ だとします。$1, 2, 3, 4, 5$ から重複を許して 3 個を選びます。重複して

もOKなので、例えば$1,1,3$という場合もあるし、$2,2,2$なんて場合もあります。もちろん、すべてが違う数で$1,3,5$なんてときもOKです。

ここからは、（１）と同じように選んだ３つの数字を一列に並べます。この並べ方は１通りです。だから、今回の場合は、異なるn個のものから重複を許して３個選ぶ組み合わせの個数と一致します。

＊すべてにイコールが含まれているので、単に重複組み合わせでもOKでした。でも、例えば$a \leqq b < c \leqq d \leqq e$のようにイコールが含まれているものと含まれていないものが混同する場合、重複組み合わせでは解くことができません。

そのときは、さきほど話した同値変形で解いていくしかありません。重複組み合わせで解けるからOKではなく、先ほどの同値変形の解法をしっかりと理解しておいてください。

【問題（２）の別解の解答】

１以上n以下の整数から重複を許して３個の整数を選ぶ組の個数と等しい。

${}_n\mathrm{H}_3 = {}_{n+2}\mathrm{C}_3 = \dfrac{\boldsymbol{n(n+1)(n+2)}}{\boldsymbol{6}}$ 通り。

【問題（３）の解説】

＊この問題は、数学Bの数列の知識が必要です。数学Bを勉強していない人は、とばしてください。

（１)、（２）は有名問題です。見た瞬間に反応できるようになっておいてくださいね。

この（３）は、有名問題ではありません。こんなときは、その場で考えるしかありません。今回の場合、１以上n以下となっているけど、n以下では考えにくいよね（文字は考えにくい）。

そこで、例えば$n = 5$とでもして、具体的な数で考えていくことにします。

まず、$a = 1$のときだったら$a < b$が成立するのは$(a, b) = (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)$の４通

りで、$a \leqq c$ が成立するのは $(a, c) = (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5)$ の 5 通り。

あとは、b と c には何の関係もないので $a = 1$ となるのは、$4 \times 5 = 20$ 通り

今 $a = 1$ を下から次に $a = 2$ をして $\cdots$ と考えていきます。

これで、予想できたかもしれませんが $a = 1$ のとき、$a = 2$ のとき、$\cdots$ 、$a = n$ のときの場合の数をそれぞれ求めて、あとはそれらの場合の数を足していけば全体の場合の数が求められます。

n 通りすべてを書くのは無理なので、シグマを使って計算していきます。

【問題（３）の解説】

$a = k$ (k は $1 \leqq k \leqq n$ をみたす整数) のとき、

$a < b$ をみたす (a, b) の組み合わせは $n - k$ 通り。$a \leqq c$ をみたす (a, c) の組み合わせは $n - k + 1$ 通り。

＊ $a = k$ のとき、b は $k+1$ 以上 n 以下の整数です。これをみたす整数の個数は $n-(k+1)+1 = n - k$ 個です。また、c は k 以上 n 以下の整数です。これをみたす整数の個数は $n - k + 1$ 個です。

b と c は無関係なので、$a = k$ のとき、$a < b$ かつ $a \leqq c$ となる a, b, c の組の個数は $(n - k)(n - k + 1)$ 通りである。よって、求める a, b, c の組の個数は $\sum_{k=1}^{n} (n - k)(n - k + 1)$ となる。

＊ここからは $a = 1$ のとき、$a = 2$ のとき、$\cdots$、$a = n$ のときの a, b, c の組の個数を足し合わせて求めます。足し合わせるので、シグマで計算します。こういうふうに、場合の数や確率の問題でシグマを使うことはたまに出てきますよ。対応できるようになっておいてくださいね。

$\sum_{k=1}^{n}(n-k)(n-k+1)$

＊シグマの計算を少し工夫しています。詳しくは下記の【注】を見てください。

$= \sum_{k=1}^{n}(n-k)^2 + \sum_{k=1}^{n}(n-k)$

$=(n-1)^2 + (n-2)^2 + \cdots + (n-n)^2 + n^2 - \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \sum_{k=1}^{n-1} k^2 + n^2 - \frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{6}(n-1)\{(n-1)+1\}\{2(n-1)+1\} + n^2 - \frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{6}n(n-1)(2n-1) + n^2 - \frac{1}{2}n(n+1)$

$=\frac{1}{6}n\{(n-1)(2n-1) + 6n - 3(n+1)\}$

$=\frac{1}{6}(2n^2-2)$

$=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n-1)}$ 通り

【注】について

上記のシグマの計算です。

$\sum_{k=1}^{n}(n-k)(n-k+1) = \sum_{k=1}^{n}\{k^2-(2n+1)k+n(n+1)\}$ と整理してからシグマの公式を使う方法でも構いません。

ただ、今回の場合シグマの中身を見てみると $(n-k)(n-k+1)$ と $n-k$ のみの式だよね。だから、$n-k$ で整理することにしました。

$\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2$ の計算です。これは、普通通り展開して整理して計算をすると、大変です。

そこで、まずシグマの中身を書き出してみることにします。シグマの計算で、計算が大変そうなときは実際に和の形で書き表してください。そうすれば、簡単な計算法が見つかることがありますよ。

この考えに従って、$\sum_{k=1}^{n}(n-k)^2$ を書き出してみます。

$$\sum_{k=1}^{n}(n-k)^2$$
$$=(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+\{n-(n-1)\}^2+(n-n)^2$$
$$=(n-1)^2+(n-2)^2+\cdots+1^2+0^2$$
$$=0^2+1^2+\cdots+(n-2)^2+(n-1)^2$$ ◀ 足し算の順番を入れ替えた！
$$=\sum_{k=1}^{n-1}k^2$$

上記のように計算すれば、単にシグマの公式を適用すればよいだけだけら、ラクだよね。

このようにシグマの計算は、少し工夫するとラクになるということがあります。頭に入れておいてくださいね。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司