「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

n を自然数とするとき、次のことがなりたつことを証明せよ。

(1) $1111^n - 1109^n$ は２で割り切れる。

(2) $11^n - 8^n - 3^n$ は 24 で割り切れる。

(3) $2450^n - 1370^n + 1150^n - 250^n$ は 1980 で割り切れる。

【問題（１）の解説】

（１）だけだといろいろな方法があります。

1111^n は 1111 は奇数です。奇数は何乗しても奇数です。だから、1111^n は奇数です。同様に 1109^n は奇数です。$1111^n - 1109^n$ は奇数から奇数を引いたものです。

奇数から奇数を引いたものは偶数です。これを数式で表すとしたら、$a = 2a' + 1, b = 2b' + 1$ とする。$a - b = (2a' + 1) - (2b' + 1) = 2(a' - b')$。$a' - b'$ は整数より、$2(a' - b')$ は２の倍数、つまり偶数です。

こういうふうにしてもらってもいいですし、２項定理を使ってもらっても証明できます。

$1111^n = (1110 + 1)^n$ とでもして２項定理を使います。もう一方の $1109^n = (1108 + 1)^n$ として２項定理を使います。こうすることで、$1111^n - 1109^n$ が２で割り切れることを示せます。

n 乗ときたら、２項定理を使うことが多いですよ。

ただ、この問題の場合（１）、（２）、（３）を通して考えると、以下の公式を使って解くのが一番ラクです。(n 乗)−(n 乗) がきたら使うこともあります。

$a^n - b^n$ の因数分解について

$$\boldsymbol{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

上記の公式が成立することの証明は簡単ですよ。分配法則で計算してもらえば互いに打ち消しあう項が多く出てきます。右辺を展開すると、残るのは $a^n - b^n$ だけとなりますよ。

違う証明法としては、数学 B の数列を勉強をしているのなら等比数列の和として求めることもできます。

$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1}$ は初項 a^{n-1}、公比 $a^{-1}b$ の等比数列、初項から第 n 項までの項の和です。

等比数列の和の公式 $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ にあてはめると、

$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1} = \dfrac{a^{n-1}(1-(ab^{-1})^n}{1-a^{-1}b}$ でこれを変形すると上記の公式の形になってくれています。

まあ、いずれにせよ上記の公式はよく出てきますよ。しっかりと覚えておいてくださいね。「いつ使うの？」ですが、(n 乗)−(n 乗) がきたときです。

(n 乗)−(n 乗) がきたら、「この公式を使うのかな？」と気づけるようになってくださいね。

【問題（１）の解答】

$$\begin{aligned}1111^n - 1109^n &= (1111-1109)(1111^{n-1} + 1111^{n-2}\cdot 1109 + \cdots + 1111\cdot 1109^{n-2} + 1109^n)\\ &= 2(1111^{n-1} + 1111^{n-2}\cdot 1109 + \cdots + 1111\cdot 1109^{n-2} + 1109^n)\end{aligned}$$

$1111^{n-1}+1111^{n-2}\cdot 1109+\cdots+1111\cdot 1109^{n-2}+1109^{n}$ は整数なので、1111^n-1109^n は２の倍数、つまり２で割り切れる。（証明終）

【問題（２）の解説】

まず、以下のことを覚えておいてください。

倍数について

m と n が互いに素なとき、m の倍数かつ n の倍数である整数は、mn の倍数である。

文字式で書いているので少し難しく感じるかもしれませんが、当たり前のように使っている事柄ですよ。

例えば、３と４は互いに素だよね。３の倍数かつ４の倍数であるとき、3×4 つまり１２の倍数です。

これが、互いに素でないとき例えば４と６のときで考えます。４の倍数かつ６の倍数のとき、$4\times 6=24$ の倍数になるか？となればならないよね。

４と６の最小公倍数が１２なので、このときは１２の倍数となります。

＊ m と n が互いに素でないとき、「m の倍数かつ n の倍数」の整数は m と n の最小公倍数の倍数となります。これも、よく出てくるので覚えておいてくださいね。

それでは、今回の問題に戻ります。今回は２４で割り切れる、つまり２４の倍数であることを示せという問題です。

ここで、もし３の倍数かつ８の倍数であるということがいえたとしたら、３と８は互いに素なので $3\times 8=24$ の倍数ということが言えたことになるよね。

「どこから３と８が出てきたの？」と思う人もいると思います。それは、問題を見て判断しました。$11^n-8^n-3^n$ です。8^n と 3^n が出てきているよね。ここから判断しました。3^n は当然３の倍数です。だから、もし 11^n-8^n が３の倍数ということが言えれば $11^n-8^n-3^n$ も３の倍数であるということが言えるよね。

このあたりから、３と８が出てきました。それでは、解答に進みます。

【問題（２）の解答】

$11^n - 8^n = (11-8)(11^{n-1} + 11^{n-2}\cdot 8 + \cdots + 11^{n-2}\cdot 8^{n-2} + 8^{n-1})$

$\Uparrow$ $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$ で $a = 11, b = 8$ のとき

$= 3(11^{n-1} + 11^{n-2}\cdot 8 + \cdots + 11^{n-2}\cdot 8^{n-2} + 8^{n-1})$

$11^{n-1} + 11^{n-2}\cdot 8 + \cdots + 11^{n-2}\cdot 8^{n-2} + 8^{n-1}$ は整数なので、$11^n - 8^n$ は３の倍数である。

また、3^n は３の倍数であるので、$11^n - 8^n - 3^n$ は３の倍数である。
$\Uparrow$ ３の倍数どうしの和・差でできる整数は３の倍数です。これくらいなら証明なしで書いて OK です。

＊次は、$11^n - 8^n - 3^n$ が８の倍数であることを示します。示し方の流れはさっきの３の倍数のときとまったく同じです。

$11^n - 3^n = (11-3)(11^{n-1} + 11^{n-2}\cdot 3 + \cdots + 11^{n-2}\cdot 3^{n-2} + 3^{n-1})$

$\Uparrow$ $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$ で $a = 11, b = 3$ のとき

$= 8(11^{n-1} + 11^{n-2}\cdot 3 + \cdots + 11^{n-2}\cdot 3^{n-2} + 3^{n-1})$

$11^{n-1} + 11^{n-2}\cdot 3 + \cdots + 11^{n-2}\cdot 3^{n-2} + 3^{n-1}$ は整数なので、$11^n - 8^n$ は８の倍数である。

また、8^n は８の倍数であるので、$11^n - 8^n - 3^n$ は８の倍数である。

以上より、$11^n - 8^n - 3^n$ は３の倍数かつ８の倍数、つまり２４の倍数であるので、$11^n - 8^n - 3^n$ は２４で割り切れる。（証明終）

【問題（３）の解説】

1980 の倍数なんて数が大きすぎて何をしてよいのかよく分からないよね。でも、（１）や（２）と同じ方法で解けるのかな？ということで、とりあえず $a^n - b^n$ の公式を使って考えてみることにします。

今回の場合、$2450^n - 1370^n + 1150^n - 250^n$ と４個あります。$a^n - b^n$ をするには２つずつのペアが必用なので、まず $(2450^n - 1370^n) + (1150^n - 250^n)$ とペアにして計算していくことにします。

$$
\begin{aligned}
2450^n - 1370^n &= (2450 - 1370)(2450^{n-1} + 2450^{n-2} \cdot 1370 + \cdots + 2450 \cdot 1370^{n-2} + 1370^{n-1}) \\
&= 1080 \times (2450^{n-1} + 2450^{n-2} \cdot 1370 + \cdots + 2450 \cdot 1370^{n-2} + 1370^{n-1})
\end{aligned}
$$

これより、$2450^n - 1370^n$ は 1080 の倍数です。

$$
\begin{aligned}
1150^n - 250^n &= (1150 - 250)(1150^{n-1} + 1150^{n-2} \cdot 250 + \cdots + 1150 \cdot 250^{n-2} + 250^{n-1}) \\
&= 900 \times (1150^{n-1} + 1150^{n-2} \cdot 250 + \cdots + 1150 \cdot 250^{n-2} + 250^{n-1})
\end{aligned}
$$

これより、$1150^n - 250^n$ は 900 の倍数です。

$1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5,\ \ 900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ より、1080 と 900 の最大公約数は $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$ です。

1080 の倍数と 900 の倍数の和でできる整数は、180 の倍数ということがわかりました。
⇑ ある自然数とある自然数の和でできる自然数は、ふたつの自然数の最大公約数の倍数となりますよ。感覚的には分かると思うけど、以下のように数式で示すことができます。

【自然数どうしの和できる自然数が最大公約数の倍数になることの証明】
２つの自然数 m, n がある。m, n の最大公約数が g であるとき、$m = m'g,\ \ n = n'g$ (ただし、m', n' は互いに素な自然数)
＊上記のようにおける説明をします。まず、公約数ということより m は g の倍数で、かつ n は g の倍数です。

だから、とある自然数 m', n' を使って、$m = m'g, n = n'g$ と表せます。

上記の場合、まだ g は公約数であるということが言えているだけで最大公約数とは言えていません。そこで、m' と n' が互いに素が出てきます。

もし、m' と n' が互いに素でないとき、m, n は g より大きな最大公約数をもつことになるよね。例えば、8 と 12 の最大公約数は 4 です。

$8=4\times2,\ 12=6\times2$ と表すことができるので 2 は 8 と 12 の公約数です。でも、4 と 6 は互いに素でないので、さらに $8=2\times4,\ 12=3\times4$ と変形します。2 と 3 は互いに素だけど、このときさらに大きい公約数は存在しないよね。

だから、$m=m'g,\ n=n'g$ (ただし、m', n' は互いに素な自然数) とすることができます。

$m+n$

$=m'g+n'g$ ◀ $m=m'g, n=n'g$ を代入した！

$=(m'+n')g$

$m'+n'$ は整数なので、$m+n$ は g の倍数である。

さっきは、2450^n-1370^n と 1150^n-250^n をペアにすることによって、$2450^n-1370^n+1150^n-250^n$ が 180 の倍数であることがわかりました。

次は同様の操作をペアを入れ替えてやっていきます。$2450^n-1370^n+1150^n-250^n=(2450^n-250^n)-(1350^n-1150^n)$ とペアにして考えます。

ここからは、同じことをするだけです。それでは、解答に進みます。

【問題（３）の解答】

$2450^n-1370^n+1150^n-250^n=(2450^n-1370^n)+(1150^n-250^n)$

$$\begin{aligned}2450^n-1370^n&=(2450-1370)(2450^{n-1}+2450^{n-2}\cdot1370+\cdots+2450\cdot1370^{n-2}+1370^{n-1})\\&=1080\times(2450^{n-1}+2450^{n-2}\cdot1370+\cdots+2450\cdot1370^{n-2}+1370^{n-1})\end{aligned}$$

これより、2450^n-1370^n は 1080 の倍数。

$$\begin{aligned}1150^n-250^n&=(1150-250)(1150^{n-1}+1150^{n-2}\cdot250+\cdots+1150\cdot250^{n-2}+250^{n-1})\\&=900\times(1150^{n-1}+1150^{n-2}\cdot250+\cdots+1150\cdot250^{n-2}+250^{n-1})\end{aligned}$$

これより、$1150^n - 250^n$ は 900 の倍数。

$1080 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5,\ \ 900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ より、1080 と 900 の最大公約数は $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 = 180$ であるので、$2450^n - 1370^n + 1150^n - 250^n$ は 180 の倍数である。

$$2450^n - 1370^n + 1150^n - 250^n = (2450^n - 250^n) - (1370^n - 1150^n)$$

$$\begin{aligned} 2450^n - 250^n &= (2450 - 250)(2450^{n-1} + 2450^{n-2} \cdot 250 + \cdots + 2450 \cdot 250^{n-2} + 250^{n-1}) \\ &= 2200 \times (2450^{n-1} + 2450^{n-2} \cdot 250 + \cdots + 2450 \cdot 250^{n-2} + 250^{n-1}) \end{aligned}$$

これより、$2450^n - 250^n$ は 2200 の倍数。

$$\begin{aligned} 1370^n - 1150^n &= (1370 - 1150)(1370^{n-1} + 1370^{n-2} \cdot 1150 + \cdots + 1370 \cdot 1150^{n-2} + 1150^{n-1}) \\ &= 220 \times (1370^{n-1} + 1370^{n-2} \cdot 1150 + \cdots + 1370 \cdot 1150^{n-2} + 1150^{n-1}) \end{aligned}$$

これより、$1370^n - 1150^n$ は 220 の倍数。

2200 と 220 の最大公約数は 220 であるので、$2450^n - 1370^n + 1150^n - 250^n$ は 220 の倍数である。

以上より、$2450^n - 1370^n + 1150^n - 250^n$ は 180 の倍数であり、かつ、220 の倍数である。
つまり、$2450^n - 1370^n + 1150^n - 250^n$ は 180 と 220 の最小公倍数の倍数である。
$\Uparrow$ m と n が互いに素なとき m の倍数かつ n の倍数である整数は mn の倍数です。m, n が互いに素でないときは、m の倍数かつ n の倍数である整数は m と n の最小公倍数の倍数となります。

$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5,\ \ 220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$ より、180 と 220 の最小公倍数は $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 = 1980$

以上より、$2450^n - 1370^n + 1150^n - 250^n$ は 1980 の倍数である。（証明終）

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司