

「自宅に居ながら 1 対 1 の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を 70 にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

平面上の四角形 $ABCD$ が円に内接している。

$$a = AB, \quad b = BC, \quad c = CD, \quad d = DA$$

とおく。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\theta = \angle ABC$ とおくとき、 $\cos \theta$ を a, b, c, d を用いて表せ。

(2) 次の式を因数分解せよ。

$$4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

(3) $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ とする。このとき、四角形 $ABCD$ の面積 S は次の式で表されることを証明せよ。

$$S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

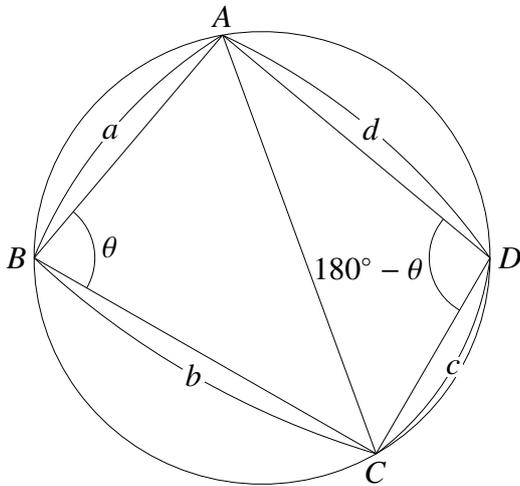
【問題（1）の解説】

これは教科書などでもよく出てくる形なので大丈夫だよ。

$\triangle ABC$ 、 $\triangle ACD$ で余弦定理を適用します。そして、 $AC^2 = \dots$ の形を 2 個作り AC を消去すれば求めることができます。

こういうふうな典型問題の解法の流れは頭に入れておいた方がいいですよ。

【問題（１）の解答】



↑ 円に内接する四角形の対角の和は 180° 。 $\angle ABC = \theta$ のとき、 $\angle ADC = 180^\circ - \theta$ となります。

三角形 ABC で余弦定理を使うと、 $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta \cdots \textcircled{1}$

三角形 ACD で余弦定理を使うと、
 $AC^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(180^\circ - \theta)$

$$= c^2 + d^2 + 2cd \cos \theta \cdots \textcircled{2} \quad \blacktriangleleft \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta \text{ の公式より！}$$

①, ② より

$$a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta = c^2 + d^2 + 2cd \cos \theta$$

$$2(ab + cd) \cos \theta = a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$

$$\cos \theta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

【問題（２）の解説】

因数分解の問題です。因数分解って受験でもよく出てきますよ。因数分解に自信がない人は以下のプリントを見てください。下記のプリントができれば、因数分解は完ぺきですよ。

因数分解その1「公式を使った因数分解」 <https://www.hmg-gen.com/insuu1.pdf>

因数分解その2「共通因数でくくり出す因数分解」 <https://www.hmg-gen.com/insuu2.pdf>

因数分解その3「最低次の文字の次数が1次の際の因数分解」 <https://www.hmg-gen.com/insuu3.pdf>

因数分解その4「最低次の文字の次数が2次の際の因数分解」 <https://www.hmg-gen.com/insuu4.pdf>

因数分解その5「2乗マイナス2乗の因数分解」 <https://www.hmg-gen.com/insuu5.pdf>

受験問題の考え方

大学受験の問題で(1)、(2)、…となっているとき前問の結果を使って解くことが多い!

上記の考えはよく出てくるので覚えておいてください。

で、今回の問題だけど三角比の問題だったのに突然因数分解の問題が出てきました。

「突然、因数分解が出てきたな」なんて違和感があるよね。で、こういうふうに出問で全然違う単元の問題が突然出題されることがあります。

突然違う単元の問題が出問として出題されたときは、まず間違いなく、この出問の結果を後々使うと考えてもらって大丈夫ですよ。

解いてもらえば分かると思います。今回は、ある意味「みえみえ」なので(2)の結果を(3)で使うんだな、とは思いつける人が多いと思います。

ただ、出問によっては気づきにくいときもあります。そんなとき、「違った単元の問題が出題されたから、怪しいな」と思えるようになっておいてください。

そうすれば、気づきにくい複雑なものでも気づけるようになってきますよ。頑張ってください。

それでは、今回の因数分解の問題に進みます。少し複雑な形をしています。ですが、よく見ると2乗マイナス2乗の形になっているので、このことを利用して問題を解いていきます。

【問題（２）の解答】

$$\begin{aligned} & 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \\ &= \{2(ab + cd)\}^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 \quad \leftarrow \text{2乗マイナス2乗の形!} \\ &= \{2(ab + cd) + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\}\{2(ab + cd) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)\} \\ &= (a^2 + 2ab + b^2 - c^2 + 2cd - d^2)(c^2 + 2cd + d^2 - a^2 - 2ab - b^2) \\ &= \{(a^2 + 2ab + b^2) - (c^2 - 2cd + d^2)\}\{(c^2 + 2cd + d^2) - (a^2 - 2ab + b^2)\} \\ &= \{(a + b)^2 - (c - d)^2\}\{(c + d)^2 - (a - b)^2\} \\ &= \{(a + b) + (c - d)\}\{(a + b) - (c - d)\}\{(c + d) + (a - b)\}\{(c + d) - (a - b)\} \\ &= (a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d) \end{aligned}$$

*少し気付きにくい因数分解だったかもしれませんが、まあ当たり前なんだけど因数分解できるから因数分解をせよ、と問題になっています。

因数分解のやり方なんてそれほど種類はありません。「この解法で解くのかな？」なんて、思いつく解法をしらみつぶしで確認をしていけば答えにたどり着くことがほとんどですよ。

しらみつぶしに調べるといっても、解法が頭の中に入っていないと思いつく訳ありません。そういった意味で、典型問題の解法はしっかりと頭の仲に入れておくことが重要です。

【問題（３）の解説】

四角形に限らず多角形の面積は、対角線を引いて複数三角形に分割します。

それぞれの三角形の面積を求めて、その面積を足し合わせて元の多角形の面積を求めることが多いです。今回の場合も、同様です。

三角形の面積を求めるとき $S = \frac{1}{2}xy \sin \theta$ の公式を使って求めます。(1) で $\cos \theta$ の値を求めています。ここから、 $\sin \theta$ の値を求めてから三角形の面積を求めます。

この問題は少し計算が煩雑ですが、やることとしては簡単です。また、当然(2)の結果を途中で利用します。「(2)の結果を使うんだらうな」と頭に入れて解いていくようにしてください。

【問題（3）の解答】

*必要になるので、まず $\sin \theta$ の値を求めておきます。

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta &= 1 - \cos^2 \theta \\ &= 1 - \left\{ \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)} \right\}^2 \\ &= \frac{4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2}{\{2(ab + cd)\}^2} \\ &= \frac{(a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d)}{\{2(ab + cd)\}^2} \quad (\because (2)) \end{aligned}$$

$0 < \theta < \pi$ より $\sin \theta > 0$

↑ 円に内接する四角形の一つの内角は $0 < \theta < \pi$ です。そうでないと、円に内接しません（四角形が円に内接するとは、四角形の4頂点が円周上にあることです）。

よって、

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{\frac{(a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d)}{\{2(ab + cd)\}^2}} \\ &= \frac{\sqrt{(a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d)}}{2(ab + cd)} \end{aligned}$$

* $\sqrt{A^2} = |A|$ ということに気を付けてね。今回は $2(ab + cd) > 0$ だから $\frac{1}{\sqrt{\{2(ab + cd)\}^2}} = \frac{1}{|2(ab + cd)|} = \frac{1}{2(ab + cd)}$ です。ルートを外すときは、常に気を付けてください。

$S = (\triangle ABC) + (\triangle ACD)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}ab \sin \theta + \frac{1}{2}cd \sin(180^\circ - \theta) \\ &= \frac{1}{2}ab \sin \theta + \frac{1}{2}cd \sin \theta \quad \blacktriangleleft \sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta \text{ より !} \\ &= \frac{1}{2}(ab + cd) \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}(ab + cd) \cdot \frac{\sqrt{(a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d)}}{2(ab + cd)} \\ &\quad \left(\because \sin \theta = \frac{\sqrt{(a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d)}}{2(ab + cd)} \right) \\ &= \frac{\sqrt{(a + b + c - d)(a + b - c + d)(a - b + c + d)(-a + b + c + d)}}{4} \end{aligned}$$

ここで、 $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ より $2s = a+b+c+d$ となる。

よって、 $a+b+c = d-2s$, $a+b+d = c-2s$, $a+c+d = b-2s$, $b+c+d = a-2s$ となるので、

$$\begin{aligned} S &= \frac{\sqrt{(2s-d-d)(2s-c-c)(2s-b-b)(2s-a-a)}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{16(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}{4} \\ &= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \end{aligned}$$

以上より、 $S = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$ が成立する。(証明終)

ヘロンの公式は知っている人が多いと思います。 $s = \frac{a+b+c}{2}$ とすると、三角形の面積 S は $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ となり、これがヘロンの公式です。

ヘロンの公式は、3辺とも整数以外のおときは計算が大変になることが多いです。だから、3辺とも整数のおとき以外に使うことは少ないということをお覚えておいてくださいね。

で、今回の公式ヘロンの公式とよく似ているよね。ヘロンの公式の親戚みたいな公式なんだけど、ブラーマグプタの公式なんて呼ばれています。

*この公式をお覚えている人がいます。お覚えている人はそれでもいいけど、わざわざお覚えなくていいですよ。

この公式に限らず、変わった公式をおありがたがる人がいます。でも、大学受験、特に難関大学では単純な公式で解ける問題は出題されません。

そんなこと、大学側は把握しています。単純な公式で解けるような問題が出てくることはマレですよ。だから、こんな公式をおありがたがらずに一般的な解法で解けるようになっておいてくださいね。

私立の医学部を目指すなど、特殊な大学を受ける人は覚えておいてもいいかもしれませんが。ただ、こういったテクニク的なものよりも、まじめに解く解法をまずは身につけていってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦勞はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司