

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ のとき、 $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$ の値を求めよ。

【問題の解説】

数学の基本的な考えを理解して欲しいと思って、この問題を選びました。この問題は、少し難しいのでまずは以下の補題を解いてもらいます。

よく似た問題ではありますが、以下の補題の方がだいぶ簡単です。

補題

$a + b + c = 0$ のとき、 $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c}$ の値を求めよ。

【解法その1】

まずは、以下のことを覚えておいてください。

数学の鉄則

数学において文字の種類が多いほどとにかく考えにくい！文字を消去できるときは、文字を消去してから考える！！

数学は文字の種類が多いほど考えにくいです。だから、文字の種類を減らせるときは減らしてから考えるとうまくいくことが多いです。

↑減らす前からうまくいくかどうかは想像できません。ただ、ほとんどの場合、文字の種類を減らすとうまい具合に解けるようになっていきます。だから、文字の種類を減らせるときは、何も考えることなく文字の種類を減らしてみてください。

じゃあ、とりあえず文字を消去する方法で解いていきます。今回の場合、どの文字を消去しても対称性より計算量は同じと予想できます。

アルファベット順で、 $c = -a - b$ として c を消去してから考えます。

$$\begin{aligned} & \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \\ = & \frac{b+(-a-b)}{a} + \frac{(-a-b)+a}{b} + \frac{a+b}{-a-b} \quad (\because c = -a - b) \\ = & \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} + \frac{a+b}{-(a+b)} \\ = & -1 - 1 - 1 \\ = & -3 \end{aligned}$$

今、 c を消して a, b のみの式にしました。この問題でも、 c を消去したからといって、解けるという認識はありませんでした。

ただ、「文字の種類を減らせるときは減らしてから考える!」という考えに則っただけです。それで、解けてしまいました。

とりあえず、文字の種類を減らせるときは減らしてから考えるという考えを身につけておいてください。

【解法その2】

通常、文字の種類を減らせるときには減らしてから考えます。ただ、この問題に限っては別解があります。それを紹介しておきます。

~~$a + b + c = (\text{一定})$ の考え方~~

$a + b + c = (\text{一定})$ のとき、 $a + b = (\text{一定}) - c$ 、 $b + c = (\text{一定}) - a$ 、 $c + a = (\text{一定}) - b$ として解いていくことがある!

今回の場合、 $a + b + c = 0$ と $a + b + c = (\text{一定})$ だよね。こんなとき、 $a + b = -c$ 、 $b + c = -a$ 、 $c + a = -b$ として、代入していけばうまくいくことがありますよ。

$$\begin{aligned} & \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \\ &= \frac{-a}{a} + \frac{-b}{b} + \frac{-c}{c} \quad (\because a+b=-c, b+c=-a, c+a=-b) \\ &= -1 - 1 - 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

この解き方の方がラクだったよね。 $a+b+c=(一定)$ という条件があって、問題で $a+b, b+c, c+a$ があるときはこの解法を使えばうまくいくということを覚えておいてください。

*さらに一歩進めた考え方として…

さらに一歩進めた考え方を話します。 $a+b+c=(一定)$ という条件があるときは、 $a+b, b+c, c+a$ を強引に作り出してから、さきほどの解き方をすることもあります。

$a+b+c=(一定)$ を見たときに、「うまい具合に変形したら、 $a+b, b+c, c+a$ が出てきてくれないかな？」なんて考えます。

この考え方を知らないと解けない問題が、以前実際の大学受験でも出題されました。確か、大阪大学だったと思います。大阪大のような難関大では、そこまで突っ込んだ問題が出題されるのですね。

それでは、今回の問題です。今回の問題の場合、 $a+b+c=0$ ではなく、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ です。これを、 c について解いて c を消去するという方法でも解けます。

ただ、少し複雑そうなので、さっきでいうところの2つめの解法を使えないか？と考えます。 $a+b+c=0$ の場合、 $a+b, b+c, c+a$ があればよかったんだよね。

今回の場合 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$ なので、 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}, \frac{1}{b} + \frac{1}{c}, \frac{1}{c} + \frac{1}{a}$ ができないかな？と考えます。

少し強引ですが、以下のようにすれば解けます。それでは、解答に進みます。

【問題の解答】

$$\begin{aligned} & \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \\ &= \frac{b}{a} + \frac{c}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{c} \\ &= a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) + b\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{c}\right) + c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \end{aligned}$$

↑これで $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$, $\frac{1}{b} + \frac{1}{c}$, $\frac{1}{c} + \frac{1}{a}$ を含んだ形になった！

$$\begin{aligned} &= a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) + b \cdot \left(-\frac{1}{b}\right) + c \cdot \left(-\frac{1}{c}\right) \quad \left(\because \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{c}, \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = -\frac{1}{a}, \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = -\frac{1}{b}\right) \\ &= -1 - 1 - 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

【問題の別解】

*一応、文字消去でも解いてみます。単に計算をするだけです。ただ、やってもらったら分かると思うけど、計算がかなり大変ですよ。

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} &= 0 \\ \frac{1}{c} &= -\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \\ &= -\frac{a+b}{ab} \\ c &= -\frac{ab}{a+b} \end{aligned}$$

*ここまでで、 c を a, b で表せたので、これを代入することで c を消去して a, b のみの式にできます。

根拠はないけど、文字の種類を減らしていけばうまい具合に解けてしまうことが多いです。

$$\begin{aligned}
& \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \\
= & \frac{b - \frac{ab}{a+b}}{a} + \frac{-\frac{ab}{a+b} + a}{b} + \frac{a+b}{-\frac{ab}{a+b}} \\
= & \frac{b(a+b) - ab}{a(a+b)} + \frac{-ab + a(a+b)}{b(a+b)} - \frac{(a+b)^2}{ab} \\
= & \frac{ab + b^2 - ab}{a(a+b)} + \frac{-ab + a^2 + ab}{b(a+b)} - \frac{(a+b)^2}{ab} \\
= & \frac{b^2}{a(a+b)} + \frac{a^2}{b(a+b)} - \frac{(a+b)^2}{ab} \\
= & \frac{b^3 + a^3 - (a+b)^3}{ab(a+b)} \\
= & \frac{a^3 + b^3 - a^3 - 3a^2b - 3ab^2 - b^3}{ab(a+b)} \\
= & \frac{-3ab(a+b)}{ab(a+b)} \\
= & -3
\end{aligned}$$

今回話した、文字消去や $a+b+c = (\text{一定})$ の扱いは、高校数学の基本的な考え方です。ただ、この基本的な考え方ができていない人が多いです。

しっかりと理解しておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会 8 か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を 70 にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司