「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

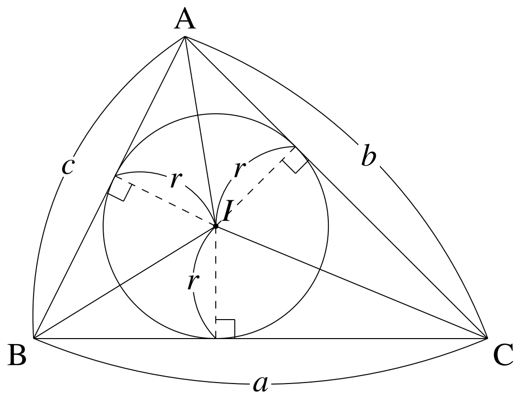
$\triangle$ABC において、辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とし、$\angle$BAC $= \theta$、外接円の半径を R、内接円の半径を r とするとき、以下の問いに答えよ。

(1) r を a, b, c および θ を用いて表せ。

(2) $a = 1, b = c$ のとき、$\dfrac{r}{R}$ の最大値を求めよ。

【問題（１）の解説】

内接円の半径を求めないといけません。内接円の半径は以下のように求めます。覚えておいてくださいね。



上図のように内接円の中心（内心のこと）を I とおきます。

＊以下、三角形 ABC の面積を $(\triangle \mathrm{ABC})$ と書くことにするね。この書き方は、説明をしなくていきなり答案に書いてもらって大丈夫です。ただ、知らない人もいるので、念のために書いています。

$(\triangle \mathrm{ABC}) = (\triangle \mathrm{IBC}) + (\triangle \mathrm{ICA}) + (\triangle \mathrm{IAB})$ が成立します。

$\triangle \mathrm{ABC} = S$ とします。また、$\triangle \mathrm{IBC}$ の面積は、底辺が a で高さが内接円の半径 r なので、$\frac{1}{2}ar$ です。同様にして、$(\triangle \mathrm{ICA}) = \frac{1}{2}br$, $(\triangle \mathrm{IAB}) = \frac{1}{2}cr$ です。

$$
\begin{aligned}
(\triangle \mathrm{ABC}) &= (\triangle \mathrm{IBC}) + (\triangle \mathrm{ICA}) + (\triangle \mathrm{IAB}) \\
S &= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr \\
&= \frac{r}{2}(a+b+c)
\end{aligned}
$$

このようにして内接円の半径を求めていきます。「内接円の半径を求めよ」とくればこの求め方しかないからね。覚えておいてください。

内接円の半径の求め方

内接円の半径は $\boldsymbol{S = \frac{r}{2}(a+b+c)}$ で求める！

それでは、解答に進みます。

【問題（１）の解答】

＊内接円の半径を求めるので、当然 $S = \frac{r}{2}(a+b+c)$ の公式を使って求めますよ。また、今回の場合 $\angle \mathrm{BAC} = \theta$ です。だから、$S = \frac{1}{2}bc\sin\theta$ です。

$$\frac{1}{2}bc\sin\theta = \frac{r}{2}(a+b+c)$$ ◀ $S = \frac{r}{2}(a+b+c)$ より！

$$r = \boldsymbol{\frac{bc\sin\theta}{a+b+c}}$$

【問題（２）の解答】

＊問題（２）は考え方を書きつつ、解答を書いていきます。$\frac{r}{R}$ です。r は（１）で求めました。R が必用なので R を求めておきます。内接円の半径は $S=\frac{r}{2}(a+b+c)$ で求めました。

一方、内接円の半径は、正弦定理を使って求めます。内接円ときたら、正弦定理で求める、ということを覚えておいてくださいね。

正弦定理より

$$\frac{a}{\sin\theta}=2r$$

$$r=\frac{a}{2\sin\theta}$$

＊これで、r も R も求まりました。今回の場合、$a=1, b=c$ なのでそれを代入していきます。

$\frac{r}{R}$ の最大値を求める問題です。最大値や最小値を求める問題は、（ほとんどの場合）複数の変数がある場合求めることができません。

だから、まずはひとつの変数で表すことができないかな？と考えます。今回の場合、$a=1, b=c$ となっています。よって、a, b, c はすべて b のみで表すことができます（c のみで表してもいいですよ。ただ、アルファベット順で b のみとすることが多いです。）

$\sin\theta$ はいきなり求めることができません。とりあえず余弦定理で $\cos\theta$ を求めて、そこから三角比の相互関係の $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を使って求めていきます。

$$\begin{aligned}\frac{r}{R}&=\frac{\frac{bc\sin\theta}{a+b+c}}{\frac{a}{2\sin\theta}}\\&=\frac{bc\sin\theta}{a+b+c}\times\frac{2\sin\theta}{a}\\&=\frac{2bc\sin^2\theta}{a(a+b+c)}\end{aligned}$$

ここで、正弦定理より $\cos\theta=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$$ ◀ 三角比の相互関係より！

$$\begin{aligned}
&= 1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 \\
&= 1 - \left(\frac{b^2 + b^2 - 1^2}{2b \cdot b}\right)^2 \quad (\because\ a = 1\, b = c) \\
&= 1 - \left(\frac{2b^2 - 1}{2b^2}\right)^2 \\
&= \frac{4b^4 - (2b^2 - 1)^2}{4b^4}
\end{aligned}$$

◀ 通分をした！

$$\begin{aligned}
&= \frac{4b^4 - 4b^4 + 4b^2 - 1}{4b^4} \\
&= \frac{4b^2 - 1}{4b^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{r}{R} &= \frac{2bc\sin^2\theta}{a(a + b + c)} \\
&= \frac{2b \cdot b}{1(1 + b + b)} \cdot \frac{4b^2 - 1}{4b^4} \quad \left(a = 1, b = c, \sin^2\theta = \frac{4b^2 - 1}{4b^4}\right) \\
&= \frac{2b^2}{2b + 1} \cdot \frac{4b^2 - 1}{4b^4} \\
&= \frac{2(4b^2 - 1)}{4b^2(2b + 1)} \\
&= \frac{(2b + 1)(2b - 1)}{4b^2(2b + 1)} \\
&= \frac{2b - 1}{2b^2}
\end{aligned}$$

ここから、少し考え方を書いていきます。

$\frac{2b - 1}{2b^2}$ と変形することができました。分母に変数が含まれているときの最大値・最小値問題は相加相乗平均を使って解くことが多いんだったんだよね。

だから、今回もその考えに従って「相加相乗平均かな？」と考える人もいると思います。
でも、今回の場合相加相乗平均では解くことができません。

$\dfrac{2b-1}{2b^2} = \dfrac{2b}{2b^2} - \dfrac{1}{2b^2} = \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{2b^2}$ と変形をしても、相加相乗平均を使える形にならないからです。

で、「そこでどうしようかな？」と考えます。そこで、$\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{2b^2}$ を丁寧に見ていくと、これって $\dfrac{1}{b}$ のみの式だよね。

$\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{2b^2} = \dfrac{1}{b} - 2\left(\dfrac{1}{b}\right)^2$ と変形したら、$\dfrac{1}{b}$ のみの式ということが分かると思います。

ここからは、置き換えずに解いてもらってもいいですし、置き換えて解いていってもかまいません。今回は、とりあえず $\dfrac{1}{b} = t$ とでもすることにするね。

ただ、ここで重要なことは範囲です。範囲を考えることを忘れないようにしてくださいね。三角形の成立条件は以下のものがあります。よく出てきますよ。覚えておいてくださいね。

三角形の成立条件

a, b, c を３辺とする三角形ができる条件は

$$|b - c| < a < b + c$$

である。

三角形の成立条件を難しく考えている人がいます。でも、簡単ですよ。

三角形が成立する条件は、「どの２辺の和も残る１辺よりも大きい」です。数式で表すと、「$a + b > c$ かつ $b + c > a$ かつ $c + a > b$」です。

この３式を a について解くと $|b - c| < a < b + c$ です。また、b について解くと $|a - c| < b < a + c$ ですよ。

今回の場合、３辺は $1, b, b$ なので、三角形の成立条件は $|b - b| < 1 < b + b$ です。左側の不等式は $0 < 1$ となるが、これは常に成立。右側の不等式は $1 < 2b$ です。これより、$b > \dfrac{1}{2}$ です。

今回は、$t = \dfrac{1}{b}$ で考えます。$b > \dfrac{1}{2}$ より $0 << \dfrac{1}{b} < 2$ となるので、$0 < t < 2$ です。補足が長くなりましたが、これから解答に戻ります。

三角形の成立条件より、$|b-b|<1<b+b$ つまり $b>\dfrac{1}{2}$ となる。

$\dfrac{1}{b}=t$ とする。$b>2$ より $0<t<2$

$$\frac{2b-1}{2b^2}$$
$$=\frac{1}{b}-\frac{1}{2b^2}$$
$$=t-\frac{t^2}{2}$$
$$=-\frac{1}{2}(t-1)^2+\frac{1}{2}$$

$0<t<2$ より、$t=1$ のとき最大値 $\boldsymbol{\dfrac{1}{2}}$ をとる。

＊最大となるときの a,b,c の値を求めても **OK** です。ただ、今回の場合、問題文で「a,b,c の値を求めよ」となっていないので、求めておかなくても大丈夫です。

基本的に、問題文に書かれていることさえ答えておけば **OK** です。

上記は大学受験での話です。定期試験の場合、学校の先生に合わせてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司