「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

a, b, c, n を自然数とし、$a \leqq b \leqq c$ かつ $n(a+b+c) = abc$ をみたすとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $a = b = c$ のとき、n は３の倍数であることを示せ。

(2) $n = 3$ のとき、自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

【問題（１）の解説】

まあ、よく分からないけど、とりあえず $a = b = c$ となっているので、この条件を使ってみることにするね。

$n(a+b+c) = abc$ に $b = a, c = a$ を代入すると、$3na = a^3$ です。両辺を a で割ると、$3n = a^2$ です。

これで、「あっ、n は３の倍数だな」と気づけるようになって欲しいです。よく出てくる問題だから解けるようになっておいてくださいね。解答を見ればわかると思うので解答に進みます。

【問題（１）の解説】

$a = b = c$ より、$n(a+b+c) = abc$ は $3na = a^3$ となる。

a は自然数であるので、$3na = a^3$ の両辺を a で割る。
⇑ 両辺を０で割ることはできません。文字式で割るときは「０でない」というひと言を付け加えておいた方がいいですよ。

＊ここから、まず a が３の倍数であることを示します。そこから、n が３の倍数であることを示します。

a を３の倍数でないと仮定する。k を整数として、$a = 3k \pm 1$ と表せる。
⇑ ３の倍数でない整数は３で割って余り１、または余り２の数です。$3k+1, 3k+2$ とおいてもいいのですが、３で割って余り２の数は、$3k-1$ とおいた方が計算がラクになることが多いです。$3k-1$ が３で割って２余る数ということが分からないという人がいます。でも、$3k-1 = 3(k-1)+2$ と $3 \times (\text{整数}) + 2$ で表されるので、$3k-1$ は３で割って２余る数ですよ。

$$
\begin{aligned}
3n &= a^2 \\
&= (3k \pm 1)^2 \quad (\because \ \ n = 3k \pm 1) \\
&= 9k^2 \pm 6k + 1 \\
&= 3(3k^2 \pm 2k) + 1
\end{aligned}
$$

$3k^2 \pm 2$ は整数より、右辺の $3(3k^2 \pm 2) + 1$ は３で割って１余る数。一方、左辺の $3n$ は３の倍数である。

よって、$3n = a^2$ は矛盾する。よって、a は３の倍数である。

l を整数とする。$a = 3l$ をする。

$a = 3l$ を $3n = a^2$ に代入すると、$3n = (3l)^2$ より $n = 3l^2$ となる。

l^2 は整数より、n は３の倍数である。（証明終）

【問題（２）の解説】

受験問題で、（１）、（２）となっているとき、（２）は（１）の結果を使って解いていくことが多いです。

ただ、結論から言えば今回の問題では（１）の結果は使わずに解いていきます。まあ、そんなときもあります。

問題を解くときは、「たぶん（1）の結果を使うんだろうな …」と意識しながら解いていきます。でも、「ああ、これは（1）を使わずに解くタイプか … 珍しいな」なんて気づきます。
⇑ 受験問題を解くときは、上記のような考えで解いています。

では、今回の問題に進みます。今回の問題は、$3(a+b+c) \leqq abc$ です。で、これを見て「ああ、一番小さな a は、かなり小さな整数になるな」という想像がつきます。

どういうことかと言うと、左辺は足し算です。で、右辺はかけ算です。足し算とかけ算だと、数字が少し大きくなれば足し算よりかけ算の方が数が大きくなるよね。

だから、（足し算）=（かけ算）となっている時点で、「それほど大きくない数字。特に $a \leqq b \leqq c$ より一番小さいな数字の a はかなり小さな数になる」と想像できます。

＊ここからは範囲を絞って考えていきます。範囲を絞るのは整数問題の常套手段ですよ。a がかなり小さな自然数という想像はつきました。「a の範囲で絞れるのかな？」といった感じで、今の段階ではまだわかりません。ただ、結果からすると今回は $ab \leqq 9$ から a, b が限定されます。

「a がかなり小さな自然数」と予想しました。ですが、a だけで範囲を絞れませんでした。とりあえず、やってみないと分かりません。こういう、整数問題は、思いついた手法でとにかく範囲を絞っていくことがポイントです。

$a+b+c$ は $a \leqq b \leqq c$ より $a+b+c \leqq c+c+c = 3c$ つまり $a+b+c \leqq 3c$ が成立します。
⇑ 慣れている人にとっては当たり前だと思います。ですが、難しく感じる人もいると思います。できるように、なっておいてくださいね。

まあ、勝手に想像できる人もいます。ですが、もし数式でするとしたら（$A \geqq B$ かつ $C \geqq D$）$\Rightarrow$ $A+C \geqq B+D$ が成立します。左辺どうしと右辺どうしを足し合わせたと考えてもらって OK です。

今回の場合 $a \leqq b \leqq c$ より（$c \geqq a$ かつ $c \leqq b$）が成立します。これで先ほどの変形をすると $c+c \geqq a+b$ つまり $2c \geqq a+b$ が成立します。また、この不等式の両辺に c を加えると $3c \geqq a+b+c$ が成立します。

$a+b+c \leqq 3c$ が成立します。今回は、問題で与えられているとおり $3(a+b+c) = abc$ です。この式を $a+b+c \leqq 3c$ の両辺を 3 倍した $3(a+b+c) \leqq 9c$ に代入をすると $abc \leqq 9c$

となり両辺を c で割ると $ab \leqq 9$ となります。

これで、かなり範囲をしぼることができました。ふたつの自然数 a, b をかけあわせて 9 となるような組み合わせの個数はたかだかしれています。

あとは、これをみたす a, b を求めて、そこからしらみつぶしに解いていきます。違った条件を考えるともう少し範囲を絞れるかもしれません。ですが、$ab \leqq 9$ だけで解いていっても、組み合わせの個数はそこまで多くありません。ですから、これで解いていくことにします。

【問題（２）の解説】

$a \leqq b \leqq c \cdots$ ①、$3(a+b+c) = abc \cdots$ ② とする。

① より $a+b+c \leqq 3c$ がいえる。また、この式の両辺に 3 をかけると $3(a+b+c) \leqq 9c$ となる。

$3(a+b+c) \leqq 9c$ に ② の $3(a+b+c) = abc$ を代入すると $abc \leqq 9c$ となる。c は自然数であるので両辺を c で割ると、$ab \leqq 9$ となる。

$a \leqq b$ と a, b は自然数であることを考えると、$ab \leqq 9$ を満たす組み合わせは $(a, b) = (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7),(1,8),(1,9),(2,2),(2,3),(2,4),(3,3)$ に限る。

＊ここからは少しメンドウですが、② の $3(a+b+c) = abc$ に代入をして c の値を求めていくしかありません。整数問題は、このように範囲を絞って、そこからしらみつぶしに計算をするというのがよく使う手法です。

(i) $(a,b)=(1,1)$ を ② に代入する

$$
\begin{aligned}
3(a+b+c) &= abc \\
3(1+1+c) &= 1\cdot 1\cdot c \\
c &= -3
\end{aligned}
$$

c は自然数より、不適。

(ii) $(a,b)=(1,2)$ を ② に代入する

$$
\begin{aligned}
3(a+b+c) &= abc \\
3(1+2+c) &= 1\cdot 2\cdot c \\
c &= -9
\end{aligned}
$$

c は自然数より、不適。

(iii) $(a,b)=(1,3)$ を ② に代入する

$$
\begin{aligned}
3(a+b+c) &= abc \\
3(1+3+c) &= 1\cdot 3\cdot c \\
12 &= 0
\end{aligned}
$$

これをみたす自然数 c は存在しないので不適。

(iv) $(a,b)=(1,4)$ を ② に代入する

$$
\begin{aligned}
3(a+b+c) &= abc \\
3(1+4+c) &= 1\cdot 4\cdot c \\
c &= 15
\end{aligned}
$$

$a \leqq b \leqq c$ を満たすので適する。

(v) $(a,b)=(1,5)$ を ② に代入する

$$
\begin{aligned}
3(a+b+c) &= abc \\
3(1+5+c) &= 1\cdot 5\cdot c \\
c &= 9
\end{aligned}
$$

$a \leqq b \leqq c$ を満たすので適する。

(vi) $(a,b)=(1,6)$ を ② に代入する

$$
\begin{aligned}
3(a+b+c) &= abc \\
3(1+6+c) &= 1\cdot 6\cdot c \\
c &= 7
\end{aligned}
$$

$a \leqq b \leqq c$ を満たすので適する。

(vii) $(a,b)=(1,7)$ を ② に代入する

$$
\begin{aligned}
3(a+b+c) &= abc \\
3(1+7+c) &= 1\cdot 7\cdot c \\
c &= 6
\end{aligned}
$$

$a \leqq b \leqq c$ を満たさないので不適。

(viii) $(a,b)=(1,8)$ を ② に代入する

$$
\begin{aligned}
3(a+b+c) &= abc \\
3(1+8+c) &= 1\cdot 8\cdot c \\
5c &= 27
\end{aligned}
$$

c は自然数より不適。

(ix) $(a, b) = (1, 9)$ を ② に代入する

$$3(a+b+c) = abc$$
$$3(1+9+c) = 1 \cdot 9 \cdot c$$
$$c = 5$$

$a \leqq b \leqq c$ を満たさないので不適。

(x) $(a, b) = (2, 2)$ を ② に代入する

$$3(a+b+c) = abc$$
$$3(2+2+c) = 2 \cdot 2 \cdot c$$
$$c = 12$$

$a \leqq b \leqq c$ を満たすので適する。

(xi) $(a, b) = (2, 3)$ を ② に代入する

$$3(a+b+c) = abc$$
$$3(2+3+c) = 2 \cdot 3 \cdot c$$
$$c = 5$$

$a \leqq b \leqq c$ を満たすので適する。

(xii) $(a, b) = (2, 4)$ を ② に代入する

$$3(a+b+c) = abc$$
$$3(2+4+c) = 2 \cdot 4 \cdot c$$
$$5c = 18$$

c は自然数より不適。

(xiii) $(a, b) = (3, 3)$ を ② に代入する

$$3(a+b+c) = abc$$
$$3(3+3+c) = 3 \cdot 3 \cdot c$$
$$c = 3$$

$a \leqq b \leqq c$ を満たすので適する。

以上より、$(a, b, c) =$ **(1, 4, 15), (1, 5, 9), (1, 6, 7), (2, 2, 12), (2, 3, 5), (3, 3, 3)**

＊最後、少しメンドウだったよね。工夫をすればもう少し範囲を絞りこめたかもしれません。ですが、その工夫をする時間を考えると、多少メンドウですが、今回のようにしらみつぶしに解いた方が短時間に解けると思います。

整数問題はどこまで範囲を絞り込むか？ということも重要になってきます。ただ、このあたりは多くの問題を解いて経験値を増やしていくしかないと思いますよ。

それでは、頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司