「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

---

問題

以下の条件をみたす実数 $x$ の値の範囲をそれぞれ求めよ。

(1) $x^2+xy+y^2=1$ をみたす実数 $y$ が存在する。

(2) $x^2+xy+y^2=1$ をみたす正の実数 $y$ が存在しない。

(3) すべての実数 $y$ に対して $x^2+xy+y^2>x+y$ が成立する。

## 【問題（１）の解説】

一見難しそうですけど、単なる２次方程式の問題ですよ。受験では、こういった問題がよく出てきます。

教科書ではあまり見たことがないかもしれません。ですが、「ああ、こうやって解けばいいんだな」ということを理解しておいてください。

（１）の問題は、「$x^2+xy+y^2=1$ をみたす実数 $y$ が存在するような実数 $x$ の値の範囲を求めよ」という問題です。

難しそうだけど、$x^2+xy+y^2=1$ は $x$ を定数とみなすと単なる $y$ についての２次方程式なんだよね。「実数 $y$ が存在する」とは「２次方程式が実数解をもつ」ということです。

だから、判別式が０以上で解いていけばいいだけですよ。

## 【問題（１）の解答】

$x^2+xy+y^2=1$ より、$y^2+xy+x^2-1=0$

$y$ についての２次方程式 $y^2+xy+x^2-1=0$ の判別式を $D$ とする。実数 $y$ が存在するとき、$D \geqq 0$ である。

$$
\begin{aligned}
D = x^2 - 4\cdot 1\cdot (x^2-1) &\geqq 0 \\
3x^2 - 4 &\leqq 0 \\
(\sqrt{3}x+2)(\sqrt{3}x-2) &\leqq 0
\end{aligned}
$$

よって、求める $x$ の値の範囲は $\boldsymbol{-\dfrac{2}{\sqrt{3}} \leqq x \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}}$ である。

## 【問題（２）の解説】

（１）と同じように考えていきます。$x^2+xy+y^2=1$ をみたす正の実数 $y$ が存在しないとは、$y$ についての２次方程式 $y^2+xy+x^2-1=0$ が正の実数解をもたない、と言い換えることができるよね。

＊ここから意外にややこしいです。丁寧に読んで、ついてきてくださいね。

例えば $f(x)$ が $x^2$ の係数が正の２次式だとします（つまり、$y=f(x)$ のグラフは、下に凸な放物線）。「２次方程式 $f(x)=0$ が正の実数解をもたない」を考えます。

で、この「２次方程式 $f(x)=0$ が正の実数解をもたない」はいろいろな考え方があります。あれこれ丁寧に考えるのはメンドウなので、僕は以下のようい考えます。

(ｉ) ２次方程式が実数解をもたない
(ii) ２次方程式が実数解をもつが、その解が正ではない。つまり０以下

上記のように考えることができます。これで考えると、複雑なことは特に考えることなく、解けてしまいますよ。

なお、(ii) の問題は、２次関数でよく出てくる「解の配置」に関する問題です。答えを見て分からない人は、以下のプリントで勉強をしておいてください。

「解の配置のプリント」https://www.hmg-gen.com/2jino9.pdf

それでは、解答に進みます。

## 【問題（２）の解答】

$x^2+xy+y^2=1$ をみたす正の実数 $y$ が存在しないとき、$y$ についての２次方程式 $y^2+xy+x^2-1=0$ が正の実数解をもたない。

このとき、以下の２通りが考えられる。

(ｉ) ２次方程式が実数解をもたない
(ii) ２次方程式が実数解をもつが、その解が正ではない。

(ｉ) のとき２次方程式が実数解をもたないとき、$D<0$ ◂ $D$ は（１）で使った $D$ と同じ

$$D=x^2-4\cdot1\cdot(x^2-1)<0$$
$$3x^2-4>0$$
$$(\sqrt{3}x+2)(\sqrt{3}x-2)>0$$

よって、$x<-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ または $\dfrac{2}{\sqrt{3}}<x\cdots①$

(ii) のとき $f(y)=y^2+xy+x^2-1=\left(y+\dfrac{x}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}x^2-1$ とする。
⇑ 軸が必用なので、平方完成しました。

「２次方程式が実数解をもつが、その解が正でない」つまり「２次方程式が０以下の実数解をもつ」とき

$D\geqq0,-\dfrac{x}{2}\leqq0,f(0)\geqq0$ である。
⇑ イコールが入るかどうか注意してくださいね。まず、$D$ ですが、実数解をもつとしかいっていないので、実数解の個数は２個でも１個でも OK なので $D\geqq0$ です。

$f(0)\geqq0$ もイコールを含みます。今回の場合、解が０以下であれば OK です。つまり０のときも含むので、イコールを含みます。

$D \geqq 0$ より、$-\dfrac{2}{\sqrt{3}} \leqq x \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$-\dfrac{x}{2} \leqq 0$ より $x \geqq 0$

$f(0) \geqq 0$ より $x^2 - 1 \geqq 0$ つまり（$x \leqq -1$ または $1 \leqq x$）

$-\dfrac{2}{\sqrt{3}} \leqq x \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ かつ $x \geqq 0$ かつ（$x \leqq -1$ または $1 \leqq x$）

つまり $1 \leqq x \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdots$ ②

以上より、① または ② より、$\boldsymbol{x < -\dfrac{2}{\sqrt{3}}}$ **または** $\boldsymbol{1 \leqq x}$

⇑① または ② です。ということは ① か ② のどちらか一方でも OK です。そのことを考えると、$x$ の値の範囲は答えのようになりますよ。分かりにくい人は、数直線をかけば分かると思いますよ。

## 【問題（３）の解答】

＊与えられている不等式を移項して $y$ について整理すると、$y^2 + (x-1)y + x^2 - x > 0$ となります。この部分を $g(y)$ とします。$z = g(y)$ とでもすると、$z = g(y)$ のグラフは下に凸な放物線なんだよね。

下に凸な放物線が常に正となるとき、頂点の $y$ 座標（今回の場合 $z$ 座標）が正で解いていけば OK です。別に判別式を利用してもらってもいいですよ。

$D < 0$ のとき、放物線と $x$ 軸に共有点はない。$z = f(y)$ は下に凸な放物線だから、このとき $g(y)$ は常に正となる、と書いてもらってもかまいません。

$x^2 + xy + y^2 > x + y$ より $y^2 + (x-1)y + x^2 - x > 0$ となる。

$g(y) = y^2 + (x-1)y + x^2 - x$ とする。曲線 $z = g(y)$ は下に凸な放物線である。頂点の $z$ 座標が正であるとき、$g(y)$ は $y$ の値に関係なく常に正となる。

$$
\begin{aligned}
g(y) &= y^2 + (x-1)y + x^2 - x \\
&= \left(y + \frac{x-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + x^2 - x \\
&= \left(y + \frac{x-1}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4} + x^2 - x \\
&= \left(y + \frac{x-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

よって、放物線 $z = g(y)$ の頂点の $z$ 座標は $\frac{3}{4}x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$ となる。この頂点の $z$ 座標が正となるので

$$\frac{3}{4}x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{4} > 0$$

、$3x^2 - 2x - 1 > 0$

$(x-1)(3x+1) > 0$

よって、$\boldsymbol{x < -\frac{1}{3}}$ **または** $\boldsymbol{1 < x}$

## 【無料で読めるメルマガの紹介】

---

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

## ルールを覚えれば誰でもできる！
## あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

---

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司