「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

x, y を正の整数とする。

(1) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ をみたす組 (x, y) をすべて求めよ。

(2) p を３以上の素数とする。$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ をみたす組 (x, y) のうち、$2x+3y$ を最小にする (x, y) を求めよ。

【問題（１）の解説】

（１）は、よく出るタイプの問題です。こういう問題は、強引に変形をして
「（整数）×（整数）＝（整数）」の形にして解いていきます。

このことがよく分からない、という人は以下のプリントを見てください。詳しく解説しています。

「方程式の整数問題の解説プリント」https://www.hmg-gen.com/merumaga1a-5.pdf

【問題（１）の解答】

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4}$$

$8y+4x=xy$ ◀ 両辺に $4xy$ をかけた！

$$xy-4x-8y=0$$

$$(y-4)x-8y=0$$

$(y-4)x-8(y-4)=32$ ◀ 強引に共通因数を作った！

$(x-8)(y-4)=32$ ◀「（整数）×（整数）＝（整数）」の形になった！

＊今回は x, y は正の整数です。$x-8 \geqq -7, y-4 \geqq -3$ より、２つの整数をかけて３２となるとき、$x-8, y-4$ ともに正の整数しかありません。負どうしのときは、$x-8 \geqq -7, y-4 \geqq -3$ より不適です。

x, y は正の整数より $x-8 \geqq -7, y-4 \geqq -3$ となる。

$$(x-8, y-4) = (1,32), (2,16), (4,8), (8,4), (16,2), (32,1)$$
$$(x, y) = \mathbf{(9,36), (10,20), (12,12), (16,8), (24,6), (40,5)}$$

【問題（２）の解説】

「$2x+3y$ を最小にする …」ときています。数学 II を勉強している人なら、$2x+3y=k$ とおいて解いていくのかな？と考える人がいます。

x, y が実数だったらそうかもしれないけど、今回の場合 x, y は正の整数なんだよね。だから、この解き方ではありません。

そこで、どうしようかな?と考えるんだけど、受験問題で（１)、(２）となっているときは、（１）は（２）のヒントになっていることが多いんだったんだよね。

今回も方程式の整数問題だから、（１）と同じように「(整数）×（整数）＝（整数)」の形にして解いていくことができます。

それでは、解答に進みます。少し難しい問題ではありますが、解説を読みながら進めていくと理解できると思いますよ。頑張ってください。

【問題（２）の解答】

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{p}$$

$2py+px=xy$ ◀ 両辺に pxy をかけて分数をなくした！

$xy-px-2py=0$

$(y-p)x-2py=0$

$(y-p)x-2p(y-p)=2p^2$ ◀ 強引に共通因数を作った！

$(x-2p)(y-p)=2p^2$ ◀「（整数）×（整数）＝（整数）」の形になった！

＊ここから $(x-2p, y-p)$ を求めます。ふたつの数をかけて $2p^2$ になるとき、符号を正だけに限定をすると $(1, 2p^2), (2, p^2), (p, 2p), (2p, p), (p^2, 2), (2p^2, 1)$ だけです。p が素数ということを考えることを忘れないようにしてくださいね。負の方を考えると、両方とも負のもの $(-1, -2p^2), (-2, -p^2), (-p, -2p), (-2p, -p), (-p^2, -2), (-2p^2, -1)$ もかけて $2p^2$ になりますよ。

また、x, y は正の整数です。このことより $x-2p \geqq 1-2p, y-p \geqq 1-p$ となります。このことより $(x-2p, y-p)$ は両方とも正のものしか成立しません。両方とも負のものは、４個ありあましたがいずれの場合もこの $x-2p \geqq 1-2p, y-p \geqq 1-p$ より不適です。

x, y は正の整数より $x-2p \geqq 1-2p, y-p \geqq 1-p$ となる。

$(x-2p, y-p)=(1, 2p^2), (2, p^2), (p, 2p), (2p, p), (p^2, 2), (2p^2, 1)$

$(x, y)=(2p+1, 2p^2+p), (2p+2, p^2+p), (3p, 3p), (4p, 2p), (p^2+2p, p+2), (2p^2+2p, p+1)$

＊これで (x, y) が分かったので、$2x+3y$ を p を使って表すことができます。例えば、$p=3$ を代入して計算してみます（$p=3$ でなくてもいいけど、一番計算がラクそうなものを選びました）。それで、計算をしてみると答えが予測できます。

(i) $(x, y)=(2p+1, 2p^2+p)$ のとき、$2x+3y=2(2p+1)+3(2p^2+p)=6p^2+7p+2$

(ii) $(x, y)=(2p+2, p^2+p)$ のとき、$2x+3y=2(2p+2)+3(p^2+p)=3p^2+7p+4$

(iii) $(x, y)=(3p, 3p)$ のとき、$2x+3y=2\cdot 3p+3\cdot 3p=15p$

(iv) $(x, y)=(4p, 2p)$ のとき、$2x+3y=2\cdot 4p+3\cdot 2p=14p$

(v) $(x, y)=(p^2+2p, p+2)$ のとき、$2x+3y=2(p^2+2p)+3(p+2)=2p^2+7p+6$

(vi) $(x, y)=(2p^2+2p, p+1)$ のとき、$2x+3y=2(2p^2+2p)+3(p+1)=4p^2+7p+3$

$p = 3$ のとき、

(ｉ) $6p^2 + 7p + 2 = 6 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 + 2 = 77$

(ii) $3p^2 + 7p + 4 = 3 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 + 4 = 52$

(iii) $15p = 15 \cdot 3 = 45$

(iv) $14p = 14 \cdot 3 = 42$

(ｖ) $2p^2 + 7p + 6 = 2 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 + 6 = 45$

(vi) $4p^2 + 7p + 3 = 4 \cdot 3^2 + 7 \cdot 3 + 3 = 60$

よって、最小のものは $14p$ であると予想できる。

∗上記でいきなり $14p$ が最小というのはダメですよ。$p = 3$ のとき $14p$ が最小ということはわかりました。でも、他の p、例えば $p - 5, 7, \cdots$ では最小ということは言えてないよね。

だから、ここから $14p$ が最小であることを示しておかないとダメですよ。ちょっと、メンドウだけど５つの証明が必要です。

$$
\begin{aligned}
&\ \ 6p^2 + 7p + 2 - 14p \\
&= 6p^2 - 7p + 2 \\
&= p(6p - 7) + 2
\end{aligned}
$$

ここで、$p \geqq 3$ より $p > 0, 6p - 7 > 0$ となる。よって $p(6p - 7) > 0$ であるので $14p < 6p^2 + 7p + 2$ である。

$$
\begin{aligned}
&\ \ 3p^2 + 7p + 4 - 14p \\
&= 3p^2 - 7p + 4 \\
&= p(3p - 7) + 4
\end{aligned}
$$

ここで、$p \geqq 3$ より $p > 0, 3p - 7 > 0$ となる。よって $p(3p - 7) > 0$ であるので $14p < 3p^2 + 7p + 4$ である。

$p \geqq 3$ のとき $15p - 14p > 0$ つまり $14p < 15p$

$2p^2 + 7p + 6 - 14p$
$= 2p^2 - 7p + 6$
$= (p-2)(2p-3)$

ここで、$p \geqq 3$ より $p - 2 > 0, 2p - 3 > 0$ となる。よって $(p-2)(2p-3) > 0$ であるので $14p < 2p^2 - 7p + 6$ である。

$4p^2 + 7p + 3 - 14p$
$= 4p^2 - 7p + 3$
$= p(4p - 7) + 3$

ここで、$p \geqq 3$ より $p > 0, 4p - 7 > 0$ となる。よって $p(4p-7) + 3 > 0$ であるので $14p < 4p^2 + 7p + 3$ である。

以上より、$2x + 3y$ の最小値は $14p$ であり、このとき $(x, y) = \mathbf{(4p, 2p)}$ である。

この問題はかなりややこしかったよね。でも、実際の大学受験の問題は、このくらいメンドウな問題もよく出題されます。

慣れていない人にとっては難しかったかもしれません。解けるようになっておいてくださいね。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司