

「自宅に居ながら 1 対 1 の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を 70 にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

問題

整数 l, m, n は次の条件を満たすとする。

$$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} - \frac{1}{3} = \frac{1}{n}, \quad l \geq 5, m \geq 5, n \geq 1$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 整数 l と m の少なくとも一方は 5 であることを示せ。
- (2) 条件を満たす整数の組 (l, m, n) をすべて求めよ。

【問題（1）の解説】

問題に進む前に少し数学の話をします。

勘違いしている人が多いんですけど、数学のできる人は「パッと見で最初から最後まで答えが浮かんでいる」と思っている人が多いです。

もちろん、問題にもよりますが、そんなことはないですよ。どんなにできる人でも「このやり方で解けるかな？」と、とりあえず解いてみます。

そして、その解法で解ければ OK だし、解けなければその時点でまた別の解法を考えます。

少し恥ずかしいですが、今回の問題を僕の思考過程を書いていきます。できる人にとっては簡単だったかもしれませんが、僕は数学の能力は高くありません。だから、こんな形で解いています、と紹介します。

元々の数学の能力が高くなくても、こういうふうにやっていけば解けるというヒントになると思います。それでは、お見苦しいところもあるかもしれませんが、よろしく願います。

えーと設問は「整数 l と m の少なくとも一方は 5 であることを示せ」となっているけど、どうやって示すのかな？直接示す？それとも背理法で間接的に示すのかな？

「少なくとも一方」と来ているので直接示すのは難しそう … だから、背理法かな？まあ、いいや。とりあえず与えられている式を変形してから考えていこう …

$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} - \frac{1}{3} = \frac{1}{n}$ となっている。分数だったら、嫌なので両辺に $3lmn$ をかけて分数をなくしてから考えていこう！

$\frac{1}{l} + \frac{1}{m} - \frac{1}{3} = \frac{1}{n}$ の両辺に $3lmn$ をかけると $3mn + 3ln - lmn = 3lm$ となります。

これって係数に 3 がよく使われているということで、 $3(lm - ln - lm) = lmn$ と変形してみました。

左辺は 3 の倍数なので、右辺の lmn は 3 の倍数。これより、 l, m, n の少なくともひとつは 3 の倍数 … って分かったけど、これでは問題を解けそうにない … そこで、別のことを考えていくことにしました。

「うー、どう頑張っても l, m が 5 であるということは出てきそうにない …」

そこで、まだ $l \geq 5, m \geq 5, n \geq 1$ を使っていないことに気づく。これを使いたいな … 5 が出てきてほしいし …

そこで、背理法を思い出します。今回は「整数 l と m の少なくとも一方は 5 である」だから、これの否定は「整数 l と m がともに 5 でない」です。さらに、 $l \geq 5, m \geq 5$ であることより $l \geq 6, m \geq 6$ であることができます。

↑ l, m は整数です。5 でない、5 以上の整数は 6 以上の整数です。だから、 $l \geq 6, m \geq 6$ です。

これを見て、「ああ、たぶんこれで問題を解いていけるな」と安心します。なぜかと言えば、 $\frac{1}{l} + \frac{1}{m}$ は $l = m = 6$ のとき、 $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3} = 0$ と変形できるからです。

このとき左辺は0になってくれるな、ということがわかります。右辺は $\frac{1}{n}$ だけで、 $n \geq 1$ より右辺は0になることはない、これで証明できたと安心します。

*分かりにくい解説でごめんなさいね。今回の問題を解くときに僕は上記のように考えました。普段偉そうに言っている僕でもこの程度ですよ。

数学の得意な人から見たら「えっ、河見ってこんな問題もそんなグダグダな解き方しているの？」なんて感じた人もいます。

でも、僕ってこの程度。こんな考え方でも、大学受験なら対応することができますよ。それでは、解答に進みます。

【問題（1）の解答】

l, m ともに5でないと仮定する。 l, m は $l \geq 5, m \geq 5$ の整数であるので $l \geq 6, m \geq 6$ となる。

$l \geq 6, m \geq 6$ より $\frac{1}{l} \leq \frac{1}{6}, \frac{1}{m} \leq \frac{1}{6}$ となる。

これより $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$ となる。 $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{3}$ の両辺から $\frac{1}{3}$ を引くと、 $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} - \frac{1}{3} \leq 0$ となる。

n は $n \geq 1$ の自然数より $\frac{1}{n} > 0$ となる。よって、 $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} - \frac{1}{3} = \frac{1}{n}$ となることはないので、矛盾する。

以上より、 l, m のうち少なくとも一方は5である。（証明終）

【問題（2）の解答】

*当然（1）の結果を使います。 $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} - \frac{1}{3} = \frac{1}{n}$ と l と m は対称 (l と m を入れ替えても成立する) ので、とりあえず $l = 5$ とでもして解いていきます。 l と m は対称なので、

$l=5$ として求まったもので l を m に入れ替えたものも答えとなります。

また、 l, m の少なくとも一方が5のとき、片方のみが5のときと、両方とも5のときの2通りがあることに注意してください。

(1) より、 l, m の少なくとも一方が5である。 $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} - \frac{1}{3} = \frac{1}{n}$ で、 l, m は対称であるので、 $l=5$ として計算をする。

(i) l, m ともに5であるとき

$l=5, m=5$ を $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} - \frac{1}{3} = \frac{1}{n}$ に代入する。

$$\begin{aligned}\frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} &= \frac{1}{n} \\ \frac{1}{15} &= \frac{1}{n} \\ n &= 15\end{aligned}$$

$n=15$ は $n \geq 1$ を満たす。よって、 $(l, m, n) = (5, 5, 15)$

(ii) $l=5$ かつ m が5でない、つまり $m \geq 6$ のとき

*以下、方程式の整数問題なので、「(整数) \times (整数)=(整数)」の形にして解いていきます。よく分からないという人はこのプリントを見てください。

整数の解説プリント <https://www.hmg-gen.com/merumaga1a-24.pdf>

$$\begin{aligned}\frac{1}{5} + \frac{1}{m} - \frac{1}{3} &= \frac{1}{n} \\ \frac{1}{m} - \frac{2}{15} &= \frac{1}{n}\end{aligned}$$

$$15n - 2mn = 15m \quad \blacktriangleleft \text{両辺に } 15mn \text{ をかけて分数を消した!}$$

$$2mn + 15m - 15n = 0$$

$$m(2n + 15) - 15n = 0$$

$$m(2n + 15) - \frac{15}{2}(2n + 15) = -\frac{15^2}{2} \quad \blacktriangleleft \text{左辺は強引に } (2n + 15) \text{ という共通因数を作った!}$$

$$2m(2n + 15) - 15(2n + 15) = -15^2 \quad \blacktriangleleft \text{両辺に } 2 \text{ をかけて分数を消した!}$$

$$(2m - 15)(2n + 15) = -15^2 \cdots \textcircled{1} \quad \blacktriangleleft \text{「(整数)} \times \text{(整数)=(整数)」の形にした!}$$

*通常なら、ここから2つの整数をかけて -15^2 になる整数の組を探します。ただ、この問題は以下のようにすると大幅に範囲を絞ることができます。

整数問題は、こういうふうに範囲を絞ってから考えることが多いですよ。メンドウなときは特に「なんか範囲を絞るものはないかな?」と考えるようにしておいてください。

$(2m - 15)(2n + 15) = -15^2$ つまり左辺の $(2m - 15)(2n + 15)$ は負の数です。 $n \geq 1$ より $2n + 15 > 0$ よって $2m - 15 < 0$ が言えます。

m は整数より $2m - 15 < 0$ を満たす整数 m は7以下の整数です。今、 $m \geq 6$ のときなので、 $m = 6, 7$ に限ります。あとは、両方とも代入をして解いていきます。

$2n + 15 > 0$ より $2m - 15 < 0$ となる。 m は整数であるので $m \leq 7$ となる。 $m \geq 6$ とあわせると $m = 6, 7$ に限る。

$m = 6$ を①に代入する。

$$\begin{aligned}(2 \cdot 6 - 15)(2n + 15) &= -225 \\ -3(2n + 15) &= -225 \\ 2n + 15 &= 75 \\ n &= 30\end{aligned}$$

これは、 $n \geq 1$ をみたら。よって、 $(l, m, n) = (5, 6, 30)$

$m = 7$ を①に代入する。

$$\begin{aligned}(2 \cdot 7 - 15)(2n + 15) &= -225 \\ -(2n + 15) &= -225 \\ 2n + 15 &= 225 \\ n &= 105\end{aligned}$$

これは、 $n \geq 1$ をみたら。よって、 $(l, m, n) = (5, 7, 105)$

*これで $l = 5$ としたときの (l, m, n) が求まりました。 l と m は対称なので、 l と m を入れ替えたものも答えになります。

l, m の対称性を考えると、 $(l, m, n) = (5, 5, 15), (5, 6, 30), (6, 5, 30), (5, 7, 105), (7, 5, 105)$

今回の問題はどうかだったでしょうか？(1) が難しかったと思います。

ちょっと恥ずかしいけど、あえて、僕の貧相な発想を記入しておきました。

数学が超できる人はわかりませんが、普通の人はこのように考えて問題を解いていますよ。とりあえず解けそうな解法で解いていきます。

「解けそう」と言いました。解けそうな解法を思いつくためには、ある程度解法のストックが知識として必要です。それなしでは解くことはできませんよ。

ストックのない人は、まずは解法のストックを頭の中にためていってください。それで始めて、考えながら問題を解くことができるようになりますよ。頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司