「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

単元：数学Ｉの「整数」　　難易度：「基礎」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

n を整数とする。このとき、$2n^3 - 3n^2 + n$ が６の倍数であることを示せ。

【解説】

６の倍数であることを示せという問題です。

「２かつ３の倍数」は６の倍数となるので、$2n^3 - 3n^2 + n$ が２の倍数かつ３の倍数であることを示していく方法もあります。

ちなみに、m と n が互いに素（最大公約数が１）のとき、「m の倍数かつ n の倍数」である整数は mn の倍数です。

m と n が互いに素でないとき、m の倍数かつ n の倍数の整数でも mn の倍数とはならないので気をつけてくださいね。

今回の２と３は互いに素なので、２かつ３の倍数は 2×3 つまり６の倍数です。でも、３かつ６の倍数は $3\times6=18$ の倍数とはならないからね。気を付けてください。

すべての整数は「$2n, 2n+1$」（または「$2n, 2n-1$」）で表せるよね（すべての整数は、２の倍数か２で割ってあまり１になる数)。また、同じようにすべての整数は「$3n, 3n+1, 3n+2$」（または「$3n, 3n-1, 3n+1$」）で表せます（すべての整数は、３の倍数か、３で割って余り１または２となる数のいずれか）です。

今回の場合、「２かつ３の倍数」であることを示していくんだよね。こういうふうに「２の倍数である …」と問題文にきたときは、すべての整数を $2n, 2n+1$ とおき、また「３の倍数」と問題文できたら、すべての整数を「$3n, 3n+1, 3n+2$」とおいて解いていくことが多いですよ。

たまに、「なぜこうするの？」と聞かれることもありますが、「こうしたらうまくいくことが多いから」としか言いようがありません。数学ってこういうこと多いですよ。２の倍数や３の倍数がきたら、こうするということを覚えておいてください。

ちなみに、５の倍数のときは「$5n, 5n+1, 5n+2, 5n+3, 5n+4$」（または「$5n, 5n\pm1, 5n\pm2$」とおきます)。４の倍数のときは、「$4n, 4n+1, 4n+2, 4n+3$」とおくこともあるかもしれません。ただ、４の倍数は２の倍数であることを考えて、「$2n, 2n+1$」と置くことが多いですよ２，３，５のように素数のときは今いったように解いていきます。

で、今回もその解法でも解けてしまいます。ただ、ちょっとメンドウです（$n = 2k, 2k+1$ などとして、これらをすべて代入して解いてもいいですし、合同式を使った方が多少ラクです)。

ただ、今回は以下の事実で解いていきます。

連続する整数の積について

連続する r 個の整数の積は、$r!$ の倍数である。

これは組み合わせを使えば簡単に確認できますよ。${}_n\mathrm{C}_3$ は異なる n 個のものから３個を選ぶ場合の数なんだよね。だから、当然 ${}_n\mathrm{C}_3$ は整数です。また、${}_n\mathrm{C}_3 = \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ と

なります。$\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$ が整数となるから、分子の $n(n-1)(n-2)$ は６の倍数です。

この証明は当然 $n \geqq 3$ という条件が必用です。すべての整数 n において言えている訳ではありません。だから、もし仮に「証明せよ」ときた場合この解答は使えません（場合分けをして厳密に示さないといけません）。ただ、なぜ連続する３個の整数の積は６の倍数になるか？というこが納得できるよね。

まあ、当然連続する３個の整数があれば、そのうちの１個、または２個が２の倍数です。これで、$2\times$(整数) の形で表せるので連続する３個の整数の積は２の倍数です。

また、連続する３個の整数は必ずひとつが３の倍数、ひとつが３で割って１余る数、残ったひとつが３で割って２余る数です。これで、$3\times$(整数) の形で表せるので連続する３個の整数の積は３の倍数。

これで、２かつ３の倍数が言えたので６の倍数であることも言えたことになります。ただ、連続する３個の数が６の倍数だったらいいけど、連続する１０個の整数の積が $10!$ の倍数であることを示せ、なんて言われたら６の倍数のように簡単に考えることができないよね。

そんなとき、組み合わせで考える方法を覚えておけばすぐに理解できると思いますよ。それでは、解答に進みますね。

【解答】

＊まずは、とりあえず因数分解します。連続する３個の整数の積にしたいからです。

$2n^3-3n^2+n$

$=n(2n^3-3n+1)$

$=n(n-1)(2n-1)$ ◀ とりあえあず因数分解をした！

$=n(n-1)\{2(n-2)+3\}$ ◀ 下記【注】を見よ

$=2n(n-1)(n-2)+3n(n-1)$

ここで、$n(n-1)(n-2)$ は連続する３個の整数の積である。よって、６の倍数である。
⇑連続する３個の整数の積が６の倍数は証明なしでいきなり書いてもらっても大丈夫です。ただ、心配な人は２の倍数かつ３の倍数であることを、説明した上で書いておけば

よいと思います。

よって、$2n(n-1)(n-2)$ は 6 の倍数である。

また、$n(n-1)$ は連続する 2 個の整数の積なので 2 の倍数である。$3n(n-1)$ は 6 の倍数である。

$2n(n-1)(n-2),\ 3n(n-1)$ ともに 6 の倍数であるので、その和の $2n(n-1)(n-2)+3n(n-1)$ も 6 の倍数である。

以上より、$2n^3-3n^2+n$ は 6 の倍数である。(証明終)

【注】について

上記の

$$\begin{aligned}&n(n-1)(2n-1)\\=&n(n-1)\{2(n-2)+3\}\end{aligned}$$

は、強引な式変形でした。$2n-1=2(n-2)+3$ が成立していること自体は理解できるよね。

で、なぜこんな変形をしたのかと言うと、とりあえず連続する 3 個の整数の積を作りたいからです。$n(n-1)(2n-1)$ で左側 2 個は連続する 2 個の整数の席だよね。

ここで、もし仮に $n-2$ があれば連続する 3 個の整数の積ができるからです。だから、本当に強引だけど、無理やり連続する 3 個の整数の積の形になるように変形しました。

数学ってこういう強引な式変形をすることが多いです。もちろん 6 の倍数だからといって、必ずしも 3 個の整数の積にもっていくか？と言えば、そんなことありません。

ただ、この強引に 3 個の整数の形にもっていくのも有名な解法のうちのひとつですよ。頭に入れておいてくださいね。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司