「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

単元：数学Ｉの「整数」　　難易度：「基礎」

＊難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

x, y は１以上の整数である。このとき $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$ を満たす x, y の値をすべて求めよ。

【解説】

整数問題です。整数問題と聞くと難しく感じる人がいます。

確かに他の単元と違い独特な解き方で解く問題も少なくありません。

ですが、整数問題すべてが難しいという訳ではありません。ある程度、解法が決まっているものも多いです。

今回も、解法が決まっている有名問題のうちのひとつです。重要な問題なのでしっかりと覚えておいてくださいね。

今回の問題には２つの解法があります。両方とも重要です。よくよく理解しておいてください。

【解法（その１）の解説】

まずは、解法その１で「(整数)$\times$(整数) = (整数)」を使う解法です。

「(整数)$\times$(整数) = (整数)」って何それ？と思うよね。整数問題って、他の単元と違い独特な解法で解くことがあります。

そして、有名なものは「必要条件で解いていく」ということです。いきなり、答えを求めるのではなくて、まず範囲を絞っていきます。範囲を絞った上でしらみつぶしに考えていく、というのが整数問題でよく使う解法です。

ちょっと、言葉ではよくわからないと思うので、今から説明していきます。

今回は、「(整数)$\times$(整数) = (整数)」ともっていく解法です。

こういうふうに書きましたが、厳密には左側の整数は文字を含んだ整数、右側は数字のみの整数となることが多いです。

なぜ、積の形にするのかと言えば、例えば「(整数) + (整数) = (整数)」ともっていったとします。$m + n = 10$ と変形できたとしても、ふたつの整数を足して１０になる数なんて無数にあるよね。

＊ m, n ともに整数のとき、$m + n = 10$ をみたす整数の組は $(m, n) = (-15, 25), (4, 6), \cdots$ など、マイナスの数も考えたら無数にあります。もし、m, n が正の数、などとなっていると当然個数は限られますよ。

$m + n = 10$ というようにふたつの整数の和が１０になるものは無数にあります。でも、$mn = 10$ だったらたかだかしれているよね。

符号を抜かして考えたら $(m, n) = (1, 10), (2, 5), (5, 2), (10, 1)$ の４組に限られます。もし、マイナスをいれても８組に限られます。このように、ふたつの整数の積がある数、というのは個数がある程度限られるんです。

だから、この形にもっていくために、整数の方程式問題では、強引に式変形をして「(整数)$\times$(整数) = (整数)」の形にもっていくという解法があります。

この方法は強引に共通因数を作って因数分解していきます。文字の種類が３種類のときはこの変形ができないことが多いです。

文字が２種類のときは、この「(整数)×(整数) = (整数)」にもっていくのかな？と考えるようにしてください。

＊文字が３種類のときも、この積の形にする解法で解くことがまったくない、ということではないですよ。たまに、できることもあります。ただ、確率としては非常に低いので優先順位は低いです。

他の解法で解けないか？と考えて、それでも無理な場合、この積の形にする解法で解けないかな？と考えます。

それでは、この問題を解いていくことにするね。解き方を順をおって話していきます。

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$ で、分数だと考えにくいので両辺に $5xy$ をかけます。

$5y + 5x = xy$ となり、ここから $xy - 5x - 5y = 0$ と変形します。

ここから、とりあえず x で左側２項をくくると $(y - 5)x - 5y = 0$ となります。

で、ここでもし左辺が $(y - 5)x - 5(y - 5)$ だったら $(y - 5)$ が共通因数として因数分解できるよね。$-5y$ を $-5(y - 5)$ とするためには $-5y$ に $+25$ をすればなってくれます。

当然、左辺だけに $+25$ をしたらダメなので、右辺にも $+25$ をします。ここまできたら比較的簡単なので、解答に進みます。

【解法（その１）の解答】

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$$

$5y+5x=xy$ ◀ 両辺に $5xy$ をかけた！

$xy-5x-5y=0$

$(y-5)x-5(y-5)=25$ ◀ 両辺に 25 を加えて、共通因数の $(y-5)$ を強引に作った！

$(x-5)(y-5)=25$ ◀ (整数) × (整数) = (整数) の形になった！

ここで、$x \geqq 1$ かつ $y \geqq 1$ より、$x-5 \geqq -4$ かつ $y-5 \geqq -4$ となる。

$(x-5, y-5)=(1,25),(5,5),(25,1)$

⇑ $x-5 \geqq -4$ かつ $y-5 \geqq -4$ です。-4 以上どうしの整数の積で２５となるのは、上記の３種類しかないですよ。

つまり、$(x,y)=$ **(6, 30), (10, 10), (30, 6)**

＊上記で、答は $(6,30),(10,10),(30,6)$ の３種類です。今回の問題は $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{5}$ だったよね。

これは、x と y をいれかえても同じ式なので対称式です。対称式のときは、答えも当然 x と y を入れ替えたものになりますよ。

【解法（その２）の解説】

次は解法（その２）です。単純に今回の問題を解くだけだったら、先ほどの解法（その１）の方が一般的です。

ただ、先ほどもいいましたが、解法（その１）で解けるのは文字の種類が２種類までと言うことが多いです。もし、仮に今回の問題が $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{5}$ だとしたら、この解法（その２）でしか解くことができません。

それだけ、この解法（その２）は重要なのでしっかりと解法を理解しておいてくださいね。

で、解法（その２）ですけど、範囲を絞って、絞ったあと、しらみつぶしで考えていく

という解き方で解いていきます。

こういった範囲を絞っていくという解法は、整数問題では必須の考え方です。範囲の絞り方としては、いくらでもあります。ただし、有名どころとしてはたかだかしれています。

最低限、その有名どころをおさえておくだけで、受験問題にもある程度対応できるようになりますよ。それでは、今回の問題に進みますね。

今回の問題だけど、x, y は対称なんだよね。だから、$x \leqq y$ と仮定します。そのとき、$(x, y) = (a, b)$ $(a < b)$ という答えが出てきたときは、$(x, y) = (b, a)$ と x と y をひっくりかえしたものも答えになります。

だから、とりあえず $x \leqq y$ として解いていくことにするね。

＊どうして、いきなり $x \leqq y$ が出てきたの？と思うよね。これは、範囲を絞りたいからなんです。不等式があれば範囲を絞ることができるよね。だから、こうやって考えました。

最初のうちは、納得できない人もいると思います。僕も、高校生の頃「なんでいきなり出てくんの？全然分かんない…」（ホントは兵庫県出身なので、「なんでいきなりコイツ出てくんねん!!」と関西弁でした。（← しょーもないこと言って、ごめんなさい）と困っていました。

でも、慣れてきたら分かりますよ。最初のうちは、ある程度割り切って進めるようにしてください。

とりあえず $x \leqq y$ とします。x, y ともに正なので逆数をとると大小関係が変わります。だから、$\dfrac{1}{x} \geqq \dfrac{1}{y}$ ってなるよね。

この $\dfrac{1}{x} \geqq \dfrac{1}{y}$ の両辺に $\dfrac{1}{x}$ を加えてみます。

そうすると、$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x} \geqq \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{x}$ となります。これより、$\dfrac{2}{x} \geqq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ となります。

で、今回 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$ なんだよね。この式を先ほど求めた、$\dfrac{2}{x} \geqq \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}$ の右辺に代入すると、$\dfrac{2}{x} \geqq \dfrac{1}{5}$ です。

この $\dfrac{2}{x} \geqq \dfrac{1}{5}$ 両辺に $5x$ (← 今回の場合 $x \geqq 1$ より $5x > 0$ です。不等式の両辺にかけても不等号の向きは変わりません。不等式の両辺の文字式をかけるときは常に符号考えるようにしてくださいね）をかけると、$x \leqq 10$ となります。

これで、$x \leqq 10$ ということが分かったので、範囲を絞ることができたよね。

【注】
上記で、「$\dfrac{1}{x} \geqq \dfrac{1}{y}$ の両辺に $\dfrac{1}{x}$」としました。こうすると、「なぜ $\dfrac{1}{x}$ を加えたのですか？ $\dfrac{1}{y}$ を加えてもできそうな気がします」と質問を受けることがあります。

でも、今回の場合できないですよ。と言いますか、意味のない式になってしまいます。とりあえず、やってみるね。

$\dfrac{1}{x} \geqq \dfrac{1}{y}$ の両辺に $\dfrac{1}{y}$ を加えると $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y} \geqq \dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{y}$ です。

これに $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$ を代入して整理すると、$y \geqq 10$ となります。

これで、$y \geqq 10$ と範囲を絞ることができました。でも、さっき求めた $x \leqq 10$ なら $x = 1, 2, 3, \cdots, 10$ と絞ることができているけど、$y \geqq 10$ となるような整数 y は無限にあるよね。

だから、こっちの方法でやっても範囲を絞ることができないんです。慣れてきたらある程度解く前から想像できるようになってきます。

と言っても、慣れてきても間違えることもあります。そんな場合、とりあえずできそうな方をやってみてそれで解けたら OK ですし、それで解けなければ、またその時点で別の方を考える、といった方針で進めてもらったら大丈夫ですよ。それでは、問題に戻り

ます。

$x \leqq 10$ であることがわかりました。これで、$x = 1, 2, 3, \cdots, 10$ と x を１０通りまで絞ることができました。これで１０通り、すべてしらみつぶしに解いていってもらってもOKです。

でも、まだ個数が多いよね。だから、他にもっと絞ることができないかな？と考えます。今回の場合、$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$ となっているけど、$y \geqq 1$ だから当然 $\dfrac{1}{y} > 0$ だよね。

$\dfrac{1}{y}$ は正です。だから、$\dfrac{1}{x}$ が $\dfrac{1}{5}$ 以上だとしたら、等式 $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$ が成り立つことはないよね。

だから、$\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{5}$ つまり、$5 < x$ です。x は５より大きい整数なので、x は６以上の整数です。

先ほどの、$1 \leqq x \leqq 10$ と合わせて $x = 6, 7, 8, 9, 10$ の５通りに絞ることができました。このくらいなら、あとはしらみつぶしで解いていきます。それでは、解答に進みます。

【解法（その２）の解答】

$x \leqq y$ とする。

$\dfrac{1}{x} \geqq \dfrac{1}{y}$ となる。両辺に $\dfrac{1}{x}$ を加えると $\dfrac{2}{x} \geqq \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ となる。

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{5}$ より、$\dfrac{2}{x} \geqq \dfrac{1}{5}$。つまり $x \leqq 10 \cdots ①$

x, y は１以上の整数より $\dfrac{1}{y} > 0$ である。よって、$\dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{5}$ である。$x > 5$ となるが、x は整数より $x \geqq 6 \cdots ②$

①, ② より $x = 6, 7, 8, 9, 10$ に限る。

＊これで、x を絞ることができました。あとは、しらみつぶしで頑張っていくだけです。

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$ の両辺に $5xy$ をかけると、$5x+5y=xy\cdots$③

⇑もとの $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{5}$ に代入するよりも、分数を消去した式に代入する方がじゃっかん、計算がラクになります。

$x=6$ のとき、$x=6$ を ③ に代入する。

$$5\cdot 6+5y=6y$$
$$y=30$$

このとき、$x \leqq y$ を満たすので適する。

⇑ 今回は、$x \leqq y$ のもとで解いているので、この確認を忘れないように！

$x=7$ のとき、$x=7$ を ③ に代入する。

$$5\cdot 7+5y=7y$$
$$2y=35$$
$$y=\frac{35}{2}$$

y は整数より、不適

$x=8$ のとき、$x=8$ を ③ に代入する。

$$5\cdot 8+5y=8y$$
$$3y=40$$
$$y=\frac{40}{3}$$

y は整数より、不適

$x=9$ のとき、$x=9$ を ③ に代入する。

$$
\begin{aligned}
5 \cdot 9 + 5y &= 9y \\
4y &= 45 \\
y &= \frac{45}{4}
\end{aligned}
$$

y は整数より、不適

$x = 10$ のとき、$x = 10$ を ③ に代入する。

$$
\begin{aligned}
5 \cdot 10 + 5y &= 10y \\
5y &= 50 \\
y &= 10
\end{aligned}
$$

このとき、$x \leqq y$ を満たすので適する。

よって、$x \leqq y$ のとき、$(x, y) = (6, 30), (10, 10)$ となる。

また、$y \geqq x$ のときも考えて、求める x, y の値は $(x, y) =$ **$(6, 30), (10, 10), (30, 6)$** である。

【追伸】
今回の場合、解法（その２）の方が圧倒的にメンドウでした。ただ、この解法２でしか解けない問題もあるのでしっかりと理解しておいてくださいね。

また、解法（その２）で $x \leqq 10$ は気づけたけど、$x \geqq 6$ が気づけなかった、なんていう人もいると思います。

そんな場合は、単に代入して解いていけばいいだけです。気づけなくてもそこまで気にする必要はないですよ。

と言うのも、整数問題では気づきにくいものも少なくありません。よく、問題集の答案を見て「こんなの、なかなか気づけないよ。整数問題なんて嫌い」という人がいます。

でも、問題集の解答は「こんなの普通気づけないよ…」なんてものも少なくありません。だから、そこまで気にしなくていいですよ、ということです。

まあ、見分けるひとつのポイントとしては、しらみつぶしに解く、と言ってもあまりに解の候補が多かったらメンドウだよね。そんなときは、まだ絞れるということが多いですよ。

ひとつの、テクニック的な考え方です。ただ、慣れていったら大丈夫です。毛嫌いせずに整数問題を解いていってくださいね。それでは、頑張ってください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録

しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ
https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司