

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

単元：数学Ⅰの「整数」 難易度：「発展」

*難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

a を整数とする。 x に関する方程式

$$4x^3 - (a + 9)x - 2(a - 2) = 0$$

について、次の問いに答えよ。

- (1) 実数 k が解であるとき、 a を k を用いて表せ。
- (2) 少なくとも1つの解が自然数となるような a の値を求めよ。
- (3) 少なくとも1つの解が整数ではない正の有理数となるような a の値を求めよ。

【(1) の解答】

* (1) は簡単ですよ。実数 k が方程式の解と言っています。方程式の解なんだから、方程式の x のところを k で置き換えても等式が成立します。

実数 k が解であるので、 $4k^3 - (a + 9)k - 2(a - 2) = 0$ となる。

$$4k^3 - (a + 9)k - 2(a - 2) = 0$$

$$4k^3 - ak - 9k - 2a + 4 = 0$$

$$a(k + 2) = 4k^3 - 9k + 4$$

ここで、 $k = -2$ のとき、(左辺) = 0、(右辺) = $4 \cdot (-2)^3 - 9 \cdot (-2) + 4 = -10$ より、 $k = -2$ となることはない。

↑両辺を $k+2$ で割りたいんだけど、0 で割ることはできないよね。こういうふうに、文字式で割るときは 0 になるかどうかを必ず確認しておかないとダメですよ。

もし、0 になるときは 0 のときと、0 以外になるときとで場合分けが必要です。ただ、今回の場合 $k+2 = 0$ のとき、等式が成立しないので $k+2 \neq 0$ となるので、両辺を $k+2$ で割って大丈夫です。

$$a(k+2) = 4k^3 - 9k + 4 \text{ の両辺を } k+2 \text{ で割ると、} a = \frac{4k^3 - 9k + 4}{k+2}$$

【(2) の解説】

「少なくとも 1 つの解が自然数」です。その解をとりあえず n とおくことにするね (自然数は n でおくことが多いですよ。別に違う文字においても減点はされませんがまあ、通常は n を使います。2 個自然数が必要なときは、 m, n とおくことが多いですよ。

自然数は英語で「natural number」で、その頭文字で n を使っています)

で、ここで (1) の結果を使います。(1) は k は実数でした。今回 n は自然数です。でも、自然数は実数の一種なんだよね。だから、(1) の k のところを、 n で置き換えてもらって大丈夫ですよ。

k を n で置き換えると $a = \frac{4n^3 - 9n + 4}{n+2}$ となります。この式で考えていく訳なんだけど、この式を見た瞬間に以下のことを思い出さないとダメです。

分数関数の次数下げについて

$f(x)$ と $g(x)$ は x の整式。 $\frac{f(x)}{g(x)}$ で、「 $(f(x) \text{ の次数}) \geq (g(x) \text{ の次数})$ 」のとき、分子の次数の方が、分母の次数よりも低くなるように変形してから解いていく！

今回の場合、分母は $n+2$ で 1 次、分子は $4n^3 - 9n + 4$ で 3 次と分子の方が分母よりも次数が高いよね。だから、分子の次数の方が分母の次数よりも低くなるように変形します。

で、どうするのかと言えば分子を分母で割るだけです。

$(4n^3 - 9n + 4) \div (n + 2)$ をします。

$$\begin{array}{r} 4n^2 - 8n + 7 \\ n + 2 \overline{) 4n^3 - 9n + 4} \\ \underline{4n^3 + 8n^2} \\ -8n^2 - 9n \\ \underline{-8n^2 - 16n} \\ 7n + 4 \\ \underline{7n + 14} \\ -10 \end{array}$$

これで、 $4n^3 - 9n + 4 = (n + 2)(4n^2 - 8n + 7) - 10$ と言えよ。

↑ A を B で割ったときの商が Q 、余りが R のとき、 $A = BQ + R$ が言えますよ。今回もこれを使っただけです。よく使う式変形なので覚えておいてください。

$$\frac{4n^3 - 9n + 4}{n + 2} = \frac{(n + 2)(4n^2 - 8n + 7) - 10}{n + 2} = \frac{(n + 2)(4n^2 - 8n + 7)}{n + 2} - \frac{10}{n + 2} = 4n^2 - 8n + 7 - \frac{10}{n + 2}$$

上記のように変形します。そうすると、分数の部分は $\frac{10}{n + 2}$ でこれだと分母の次数の方が分子の次数よりも高いよね。

分数関数で分子の方が分子よりも次数が高いときは、こういうふうに変形をしてから解いていきます。今後、ずっと出てくるので覚えておいてください。

それでは、問題に戻ります。 $a = 4n^2 - 8n + 7 - \frac{10}{n + 2}$ と変形できました。ここからが整数問題です。

今回の場合 a は整数です。ということは右辺も整数になっていないとダメなんだよね。 n は

整数だから、 $4n^2 - 8n + 7$ も整数です。

ということは、右辺が整数であるためには $\frac{10}{n+2}$ が整数でないといけません。つまり、 $n+2$ が 10 の約数だったらいいなだね。

さらに、今回の場合 n は自然数つまり $n \geq 1$ です。ということは、 $n+2 \geq 3$ です。10 の約数で、しかも 3 以上なんだから $n+2 = 5$ or 10 となりますよ。整数はこういう考え方をすることが多いです。慣れておいてください。それでは、解答に進みます。

【(2) の解答】

自然数の解を n とする。 n は実数なので、(1) の k を n でおきかえてよい。

$$a = \frac{4n^3 - 9n + 4}{n+2} = 4n^2 - 8n + 7 - \frac{10}{n+2} \text{ となる。}$$

ここで、 a は整数であり、 $4n^2 - 8n + 7$ も整数であるので、 $\frac{10}{n+2}$ も整数である。 $n+2 \geq 3$ より $n+2 = 5, 10$ つまり $n = 3, 8$ となる。

(i) $n = 3$ のとき

$$\begin{aligned} a &= \frac{4 \cdot 3^3 - 9 \cdot 3 + 4}{3+2} \\ &= \frac{108 - 27 + 4}{5} \\ &= \frac{85}{5} \\ &= 17 \end{aligned}$$

(ii) $n = 8$ のとき

$$\begin{aligned} a &= \frac{4 \cdot 8^3 - 9 \cdot 8 + 4}{8+2} \\ &= \frac{2048 - 72 + 4}{10} \\ &= \frac{1980}{10} \\ &= 198 \end{aligned}$$

*上記の計算は少しメンドウでした。こういう計算のときは、因数分解をするなど工夫をすることもありますが、今回の場合は何もせずにフツーに計算するのが一番簡単そうなので、フツーに計算しました。

こういうときは、「何か簡単な計算の仕方はないかな?」と考えられるようにしておいてくださいね。

以上より、 $a = 17, 198$

【(3) の解説】

こういう問題、苦手な人が多いです。でも、よく出てくるのでしっかりと解けるようになっておいてくださいね。

まず、今回の場合、整数でない正の有理数となっています。(2)の場合自然数だから n とおきました。今回の場合有理数と言っているので $\frac{n}{m}$ とでもおくことにするね。

*ちなみに有理数とは $\frac{n}{m}$ のようにふたつの整数の商で表されるような数です。分母に 0 がきたらダメなので当然 $m \neq 0$ です。

たまに、有理数であるとき m と n は互いに素でないとダメ、と思っている人がいます。でも、互いに素である必要はないですよ。例えば $\frac{2}{4}$ なんかも約分はできるけど、これは有理数だよ。だから、別に m と n が互いに素である必要はありません。

ただ、既約分数(約分をしきった分数のこと)で表すとすべての有理数は分母と分子は互いに素です。だから、有理数を設定するとき、分母と分子が互いに素とおくことが多いですよ。この方が、分母と分子が互いに素という新たな条件ができるので、解きやすくなります。

さっき話したように $\frac{n}{m}$ とおいて、 m と n は互いに素な正の整数とおきます。また、今回は整数ではないときているので、分母の m は 1 以外という条件もついてきます。

$\frac{n}{m}$ がこの方程式の解なので、方程式 $4x^3 - (a+9)x - 2(a-2) = 0$ のところに $x = \frac{n}{m}$ を代入します。

別に(1)の結果を使ってもよいのですが、(1)を使った方が分かりにくいので元の方程式に代入することにします。

$$4\left(\frac{n}{m}\right)^3 - (a+9)\frac{n}{m} - 2(a-2) = 0$$

$$4n^3 - (a+9)m^2n - 2(a-2)m^3 = 0 \quad \leftarrow \text{両辺に } m^3 \text{ をかけて分数を消した!}$$

で、ここまでの式変形は簡単です。ここからが、少し難しいです。

数学は与えられて条件を使って解いていきます。今回の場合、 m と n は互いに素な正の整数、 $m \neq 1$ 、 a は整数といったものがありました。

これをどう使おう？と調べていろいろと考えます。で、方程式の整数問題のときは強引に変形をして「(整数) \times (整数) $=$ (整数)」と変形することが多かったんだよね。だから、今回もこれを使うのかな？ということで次のように変形してみることにします。

*今の段階では、こうやって進めていくという確証はないですよ。「うまくいくかな？って欲しいな」みたいな感じでやっていきます。

うまくいけばOKですし、うまくいかなければその時点で別のものを考えていきます。

$$4\left(\frac{n}{m}\right)^3 - (a+9) \cdot \frac{n}{m} - 2(a-2) = 0$$

$$4n^3 - (a+9)m^2n - 2(a-2)m^3 = 0$$

$$4n^3 = (a+9)m^2n + 2(a-2)m^3$$

$$4n^3 = m^2\{(a+9) + 2(a-2)m\}$$

これで一応、「(整数) \times (整数) $=$ (整数)」という形になりました。で、どうしようかな？と考えるんだけど、今回の場合 m と n は互いに素なんだよね。

ということは、上記の式から判断をして m^2 は2しかないということがわかるよ。すぐに分かるという人も多いと思います。でも、わからなければ次のように変形したらいいです。

せっかく、「(整数) \times (整数) $=$ (整数)」の形にしたんだけど、さらに両辺を m^2 で割ってみます。

$\frac{4n^3}{m^2} = (a+9) + 2(a-2)m$ と変形できます。右辺は整数になるよね。だから、左辺も整数になります。 $\frac{4n^3}{m^2}$ が整数です。 m と n は互いに素なので1以外に約数を持ちません。だから、 n^3 と m^2 で約分をすることは無理です。

これより $\frac{4n^3}{m^2}$ が整数のとき、 $\frac{4}{m^2}$ が整数とならないといけません。これが整数となるとき $m = \pm 1$ or ± 2 です。でも、 m は正で $m \neq 1$ より $m = 2$ に限ります。

ここまできたら簡単だと思うので、解答に進みます。

整数問題ってとにかくできそうなことをやるしかないですよ。いろいろと考えて解いていくしかありません。ただ、考えるためにはある程度「このときは、こうする」といったことを認識しておかないと、まったくのゼロから考えることは難しいですよ。

そういった意味で、典型問題を解いて解法を覚えておくということは極めて重要な作業です。頑張ってください。

【(3) の解説】

整数ではない正の有理数の解を $\frac{n}{m}$ (m と n は互いに素な正の整数である。ただし、 $m \neq 1$) とおく。

$$4n^3 - (a+9)m^2n - 2(a-2)m^3 = 0$$

$$4n^3 = (a+9)m^2n + 2(a-2)m^3$$

$$4n^3 = m^2\{(a+9)n + 2(a-2)m\}$$

$$\frac{4n^3}{m^2} = (a+9) + 2(a-2)m \cdots \textcircled{1}$$

ここで m, a は整数より、右辺の $(a+9) + 2(a-2)m$ は整数である。よって、左辺の $\frac{4n^3}{m^2}$ も整数である。

m と n は互いに素な正の整数であり、また $m \neq 1$ であるので $m = 2$ に限る。

① に $m = 2$ を代入する

$$\frac{4n^3}{2^2} = (a+9)n + 2(a-2) \cdot 2$$

$$n^3 = an + 9n + 4a - 8$$

$$(n+4)a = n^3 - 9n + 8 \cdots \textcircled{2}$$

*ここからの方針としては(1)とほぼ同じです。整数の方程式でも、どちらかの文字が1次式のときは(1次式の文字) = ... の形にしてから解いていく方法もあります。

ここで、 $n = -4$ のとき②の左辺は0となり、②の右辺は $(-4)^3 - 9 \cdot (-4) + 8 = -64 + 36 + 8 = -20$ となり②は不成立。よって、 $n \neq -4$ である。

②の両辺を $n+4$ でわると、 $a = \frac{n^3 - 9n + 8}{n + 4}$

↑(1)と同じです。分子の次数の方が分母の次数よりも高いので、割り算を使って次数を下げます。

$$\begin{array}{r} n^2 - 4n + 7 \\ n+4 \overline{)n^3 - 9n + 8} \\ \underline{n^3 + 4n^2} \\ -4n^2 - 9n \\ \underline{-4n^2 - 16n} \\ 7n + 8 \\ \underline{7n + 28} \\ -20 \end{array}$$

$$a = \frac{n^3 - 9n + 8}{n + 4} = \frac{(n + 4)(n^2 - 4n + 7) - 20}{n + 4} = n^2 - 4n + 7 - \frac{20}{n + 4}$$

よって、 $\frac{20}{n+4}$ は整数である。 $n \geq 1$ より $n+4 \geq 5$ となるので、 $n+4 = 5, 10, 20$ となるので、 $n = 1, 6, 16$ となる。

m と n は互いに素なので $n = 1$ となる。

* m と n が互いに素とは、 m と n の公約数が1のみです。1と2の公約数は1のみです。だから、1と2は互いに素ですよ。

②に $n = 1$ を代入すると、 $(1 + 4)a = 1^3 - 9 \cdot 1 + 8$ より $a = 0$ となる。

今回の問題はどうでしたか？少しややこしいと思った人もいます。整数問題っ

てややこしい問題が多いですよ。ただ、受験では頻出です。ぜひとも解けるようになっておいてくださいね。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています
<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法
<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法
<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司