

「自宅に居ながら1対1の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin.html>

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を70にするプリント」の詳細は以下をクリック！

<https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html>

単元：数学Ⅰの「整数」 難易度：「発展」

*難易度は、「基礎」「標準」「発展」「難問」に分けています。

「基礎」は教科書基本レベル。「標準」は定期試験向け、入試の基本問題。「発展」は国公立大学、MARCH、関関同立の志望者向け。「難問」は難関大学（上位国立、早慶、理科大）の志望者向け。

問題

a, b, c, d を正の整数とする。複素数 $w = a + bi$, $z = c + di$ が $w^2z = 1 + 18i$ をみたす。
 a, b, c, d を求めよ。

【解説】

整数問題です。整数問題は、とにかく必要条件から範囲を絞る、ということがポイントです。

範囲の絞り方は無数にあります。こういった難しい問題では、とにかくできることをやってみます。それで、うまくいけばOKだし、うまくいかなければ、また別の解法を考えます。

「整数問題ってどういうふうに考えてるの？」と思う人が多いです。だから、僕の思考過程を書いています。ただ、決してうまい方法ではないかもしれません。

もっと他に解法もあると思いますし、もっとスマートな方法もあるかもしれません。ただ、とりあえず解けたらOKということで解いていきます。

【問題の解説】

*最初の変形は分かるよね。 a, b, a', b' が実数のとき、 $a + bi = a' + b'i$ は $a = a'$ かつ $b = b'$ です。これを使って解いていきます。

$$w^2 z = 1 + 18i$$

$$(a + bi)^2(c + di) = 1 + 18i$$

$$(a^2 + 2abi - b^2)(c + di) = 1 + 18i$$

$$a^2c + a^2di + 2abci - 2abd - b^2c - b^2di = 1 + 18i \quad \leftarrow \text{分配法則で展開した！}$$

$$(a^2c - 2abd - b^2c) + (a^2d + 2abc - b^2d)i = 1 + 18i$$

ここで a, b, c, d は正の整数であるので、 $a^2c - 2abd - b^2c$ と $a^2d + 2abc - b^2d$ は実数である。

↑ 複素数の相当を使うときは、答案用紙に上記の部分を書いておかないと減点されますよ。

$$a^2c - 2abd - b^2c = 1, \quad a^2d + 2abc - b^2d = 18 \text{ となる。}$$

*ここからが整数問題です。で、ここからどうしようかな？と考えます。文字の数が多かったら考えにくいから、文字消去かな？と思いました。

でも、今回は文字消去といっても複雑になるから、おそらく違う …

そこで、整数で方程式のときは、(整数) \times (整数)=(整数)の形にもっていくことが多かったんだよね。今回もそれにしようかな？と思うだけで、うまく因数分解できそうにない …

じゃあ、また別のことをしないとイケない。どうしようかな？と思うんだけど、2式とも以下のように変形すると、両方の式ともに $(a^2 - b^2)$ が出てきてくれます。

別に、うまくいく根拠はないけど、とりあえずこれでやっていってみることにします。

$$2 \text{ 式は、} (a^2 - b^2)c - 2abcd = 1 \cdots \textcircled{1}, \quad (a^2 - b^2)d + 2abc = 18 \cdots \textcircled{2} \text{ と変形できる。}$$

*ここから、ほんのちよつとの手掛かりをを使いつつ、範囲を絞っていきます。

まず、①の式を見て欲しいんだけど、 $(a^2 - b^2)c - 2abcd = 1$ で、右辺は1つまり奇数です。で、 $2abcd$ は偶数です。ということは、 $(a^2 - b^2)c$ は奇数にならないといけないよね。

2つの数をかけて奇数となるのは、両方とも奇数のときのみです。だから、 $a^2 - b^2$ は奇数、 c も奇数です。

で、今 $a^2 - b^2$ は奇数です。こうなるのは a か b のどちらか一方が奇数で、残ったもう一方は偶数です。 a, b の両方とも奇数や両方とも偶数のとき、 $a^2 - b^2$ は偶数になってしまいますよ。これは、少し考えたら分かると思います。

さらに、今回 a, b, c, d はすべて正です。 $(a^2 - b^2)c - 2abcd = 1$ と右辺の1は正の数です。で、 $(a^2 - b^2)c$ が負の数だったら、左辺は絶対に負の数になってしまいます。だから、 $(a^2 - b^2)c > 0$ です。今、 $c > 0$ より $a^2 - b^2 > 0$ です。つまり $a^2 > b^2$ です。 a も b も正の数だから、 $a > b$ がいえます。

で、いままで①を見てきたけど、次に②の式を見ていきます。②の式は、 $(a^2 - b^2)d + 2abc = 18$ となっています。今、 $a^2 - b^2 > 0$ であることが言えたので、 $(a^2 - b^2)d$ も $2abc$ も正の数なんだよね。左辺は正の数2つを足しています。そして、右辺は18になるってっています。でも、これでかなり範囲を限定できそうだね。

今、 $a > b$ でなおかつ a と b は偶奇が違うんだよね。こんな中で $a^2 - b^2$ が一番小さくなるのは $a = 2, b = 1$ のときです。また、 d は正の数です。このとき $(a^2 - b^2)d$ は $a = 2, b = 1, d = 1$ のときに一番小さくなって $(a^2 - b^2)d = 3$ です。

このことと、 $(a^2 - b^2)d + 2abc = 18$ より $2abc$ は15以下でないといけません。また、 ab の値が一番小さくなるのも $a = 2, b = 1$ のとき($a > b$ かつ a, b の偶奇が違うとき)となります。だから、 $2abc \leq 15$ で $a = 2, b = 1$ のとき $4c \leq 15$ です。つまり、 $c \leq \frac{15}{4}$ で c は正の整数より、 $c = 1, 2, 3$ に限ります。で、さらに c は奇数って言っていたんだよね。だから、さらに $c = 1, 3$ に限ります。ここまで限定出来たらかなり簡単だね。

また、②の式で $(a^2 - b^2)d + 2abc = 18$ となりました。これより $(a^2 - b^2)d$ は偶数でないといけません。ところが、 $a^2 - b^2$ は奇数より、 d は偶数ですよ。

①より、 $(a^2 - b^2)c$ は正の奇数となる必要がある。これより $a > b$ で a と b の偶奇は異なる。また、 c は奇数である。

$(a^2 - b^2)d \geq (2^2 - 1^2) \cdot 1 = 3$ であるので、②より $2abc \leq 15$ となる。また、 $ab \geq 2$ ということと、 c は正の奇数ということより $c = 1, 3$ に限る。

また、②で $(a^2 - b^2)d$ は偶数でないといけない。 $a^2 - b^2$ は奇数より、 d は偶数である。

*ここまでの操作で $c = 1, 3$ に限るということがわかりました。ここからは、 $c = 1$ のときと、 $c = 3$ のときをそれぞれ解いていくしかありません。

$c = 1$ を①, ②に代入する。

$$a^2 - b^2 - 2abd = 1 \cdots \textcircled{3}, \quad (a^2 - b^2)d + 2ab = 18 \cdots \textcircled{4}$$

*で、ここからどうしようかな?とまたいろいろと考えます。でも、まだ $a^2 - b^2$ が両方の式にあるんだよね。で、これを消去してみることになります。

③より $a^2 - b^2 = 1 + 2abd$ です。これを④に代入すると $(1 + 2abd)d + 2ab = 18$ です。これを整理して $d + (d^2 + 1) \cdot 2ab = 18$ となります。

で、今回の場合 $a > b$ で a と b の偶奇は異なる。さらに、 d は偶数です。 $(d^2 + 1) \cdot 2ab$ の値が一番小さくなるのは、 $a = 2, b = 1, d = 2$ のときだよね。でも、このとき $(d^2 + 1) \cdot 2ab = (2^2 + 1) \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 20$ となり、18を超えています。

ということは、 $d + (d^2 + 1) \cdot 2ab = 18$ が成立することはないので不適です。

③より $a^2 - b^2 = 1 + 2abd$ となる。これを④に代入して整理すると $d + (d^2 + 1) \cdot 2ab = 18$ となる。

$a > b$ であり a と b の偶奇は異なる。また、 d は偶数であることより $(d^2 + 1) \cdot 2ab \geq 20$ となるので、 $d + (d^2 + 1) \cdot 2ab = 18$ をみたす整数の組 $(1, b, d)$ は存在しない。よって、不適である。

* $c = 1, 3$ に限ることが分かって、今 $c = 1$ は不適ということが分かりました。だったら、 $c = 3$ の方がおそらく解になるよね。また、同様の操作をしていくだけですよ。

$c = 3$ を ①, ② に代入する。

$$(a^2 - b^2) \cdot 3 - 2ab = 1 \cdots \textcircled{5}, (a^2 - b^2)d + 6ab = 18 \cdots \textcircled{6}$$

⑥ で、 $6ab \geq 6 \cdot 2 \cdot 1 = 12$ となるので $(a^2 - b^2)d \leq 6$ となる。また、 $a^2 - b^2 \geq 3$ であることと、 d は偶数であるので、 d は 2 に限る。

$d = 2$ を ⑤ に代入すると、 $3(a^2 - b^2) - 4ab = 1 \cdots \textcircled{7}$

$d = 2$ を ⑥ に代入すると、

$$2(a^2 - b^2) + 6ab = 18$$

$$a^2 - b^2 + 3ab = 9$$

$$a^2 - b^2 = 9 - 3ab \cdots \textcircled{8}$$

⑧ を ⑦ に代入すると

$$3(9 - 3ab) - 4ab = 1$$

$$27 - 9ab - 4ab = 1$$

$$13ab = 26$$

$$ab = 2$$

a, b は $a > b$ を満たし偶奇の異なる正の整数より、 $a = 2, b = 1$ に限る。

以上より、 **$a = 2, b = 1, c = 3, d = 2$**

難しかったよね。整数問題は、とにかくできることをしていけばOKですよ。

よく「どうすれば整数問題ができるようになりますか？」と質問されます。でも、整数問題って、これまでのあらゆる知識を総動員して考えていかないといけないので、勉強をしてすぐにできるようになる単元ではありません。

もちろん、最低限覚えておかないといけないものもあります。そういったものを覚えて上で、数多く受験問題に取り組むしかありません。

整数問題は、大学受験に出題するところとそうでないところがはっきりと分かります。ある程度過去問を研究した上で、どこまで整数問題を勉強するか？ということを考えていけばよいですよ。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよ。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあってそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「4浪しているのにセンター6割」

→ 「わずか入会8か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位

→ 「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」

→ 「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を70にするメルマガ

<https://hmg-gen.com/merutou.html>



ツイッターやっています

<https://twitter.com/hmggen>

高校数学の勉強法

<https://www.hmg-gen.com/>

医学部数学の勉強法

<https://www.ouen-math.com/>

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）

magdai@hmg-gen.com

河見賢司