「自宅に居ながら１対１の数学の授業が受けられます」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin.html

「ルールを覚えれば誰でもできる！あなたの数学の偏差値を７０にするプリント」の詳細は以下をクリック！
https://www.hmg-gen.com/tuusin1.html

問題

点 P は数直線上を原点から出発して、投げたサイコロの目が $1, 2, 3$ または 4 なら正の向きに 2 進み、5 または 6 なら負の向きに 1 進むとする。点 P の座標を x として、サイコロを n 回投げたとき、$x = 15$ となる確率を p_n とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) n 回中、5 または 6 の目が k 回出る確率を n と k を用いて表せ。ただし、$k = 0, 1, \cdots, n$ とする。

(2) p_9 と p_{10} を求めよ。

(3) $n \geqq 9$ とするとき、p_n を求めよ。

【解説】

新潟大学の過去問です。確率の問題ですが、超がつくほどの有名問題です。こういったタイプの問題は、連立方程式を自分で作って解いていくということを覚えておいてください。

【（１）の解説】

文字を含んでいますが、単なる反復試行の確率です。反復試行の確率を理解していないという人はこちらのページを見てください。http://www.hmg-gen.com/kaitou1-14.pdf

【（１）の解答】

サイコロを 1 回投げたとき、5 か 6 の出る確率は $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$、1,2,3 または 4 が出る確率は $\dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$ である。

n 回中、5 または 6 が k 回出るので、1,2,3 または 4 が出る回数は $n - k$ 回である。

よって、求める確率は

$$
\begin{aligned}
&{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}\\
=&\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\cdot\frac{1}{3^k}\cdot\frac{2^{n-k}}{3^{n-k}} \quad \blacktriangleleft\ {}_n\mathrm{C}_k=\frac{n!}{(n-k)!\,k!}\text{ より}\\
=&\boldsymbol{\frac{n!\cdot 2^{n-k}}{k!\,(n-k)!\cdot 3^n}}
\end{aligned}
$$

＊ ${}_n\mathrm{C}_k=\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ の公式は覚えておいてくださいね。たまに出てきますよ。

【(２）の解説】

(1) で求めたように、1, 2, 3 または 4 が出た回数と、5 か 6 の出た回数を知ることができたら簡単に確率は求めることができます。

この回数を知るために簡単な連立方程式を使います。

1,2,3 または 4 の出た回数を a 回、5, 6 が出た回数を b 回とすると、p_9 の場合、9 回投げたとき x が 15 にいる確率を求める訳なので、

まず、あわせて 9 回投げるので $a+b=9$ という関係式が成立します。

また、1,2,3 または 4 が出たとき正の向きに 2 進み、5,6 が出たときは負の向きに 1 進むので、1,2,3 または 4 の出た回数を a 回、5, 6 が出た回数を b 回でたときにいる点は $2a-b$ となります。これが 15 になると言っているので、$2a-b=15$ となります。

後は $a+b=9$ と $2a-b=15$ を連立すると a, b の値が求まるので、これらを使って確率を求めていきます。

また、この連立方程式を解いて a, b が整数解とならないことがあります。a, b は回数なので当然整数でないといけません。整数でないときは、それはおこりえないということなので、確率は 0 となります。今回もそれが出てきますが、たまに出てくるので覚えておいてください。

【(２）の解答】

まず p_9 を求める。1,2,3 または 4 が a 回、5,6 が b 回でたとする。

あわせて9回投げるので、$a+b=9\cdots$①
$x=15$ の位置にいるので、$2a-b=15\cdots$②

①と②を連立して、$a=8,\ b=1$ となる。よって、p_9 は

$$
{}_9\mathrm{C}_1\left(\frac{2}{3}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{3}\right)
$$

$$
=\mathbf{\frac{256}{2187}}
$$

次に、p_{10} を求める。1,2,3 または 4 が c 回、5,6 が d 回でたとする。

あわせて9回投げるので、$c+d=10\cdots$①
$x=15$ の位置にいるので、$2c-d=15\cdots$②

①と②を連立しても c,d はともに整数とならない。これはおこりえない。よって、求める確率 p_{10} は0である。

(注) 今回は連立方程式という解き方を理解してもらうために、わざわざこういった解法にしましたが、(1) で求めた結果を使って求めていったもいいです。むしろ、流れとしては (1) を使う方が一般的だと思います。簡単なので、別解は割愛します

【（３）の解答】

＊これも同じように解いていくだけです。

(1) で考えたように5または6がk回、1,2,3 または 4 が $n-k$ 回出たとする。ただし、$n\geqq 9$

5または6のとき負の方向に1進み、1,2,3 または 4 が出たとき正の方向に2進むので、6がk回、1,2,3 または 4 が $n-k$ 回でたときの座標は $-k+2(n-k)=2n-3k$ となる。

求める確率は座標が15となるときなので、$2n-3k=15$ となる。

$$
\begin{aligned}
2n-3k&=15\\
3k&=2n-15\\
k&=\frac{2}{3}n-5
\end{aligned}
$$

上記のようになるが、$n,\ k$ がともに整数であるとき以外、求める確率 p_n は0となる。

$k=\dfrac{2}{3}n-5$ より、ともに整数となるには n が 3 の倍数である必要がある。以下、n が 3 の倍数のときを考える。

よって、求める確率は (1) で計算した $\dfrac{n!\cdot 2^{n-k}}{k!\,(n-k)!\cdot 3^n}$ に $k=\dfrac{2}{3}n-5$ を代入すると

$$\frac{n!\cdot 2^{n-k}}{k!\,(n-k)!\cdot 3^n}$$

$$=\frac{n!\cdot 2^{n-\left(\frac{2}{3}n-5\right)}}{\left(\frac{2}{3}n-5\right)!\left\{n-\left(\frac{2}{3}n-5\right)\right\}!\cdot 3^n}$$ ◀ $k=\dfrac{2}{3}n-5$ を代入した

$$=\frac{n!\cdot 2^{\frac{n}{3}+5}}{\left(\frac{2}{3}n-5\right)!\left(\frac{n}{3}+5\right)!\cdot 3^n}$$ ◀ これが答え

以上より、

(i) n が 9 以上の 3 の倍数でないとき、$p_n=\mathbf{0}$

(ii) n が 9 以上の 3 の倍数のとき、$p_n=\dfrac{n!\cdot 2^{\frac{n}{3}+5}}{\left(\frac{2}{3}n-5\right)!\left(\frac{n}{3}+5\right)!\cdot 3^n}$

今回の問題はどうだったでしょうか 1，2 年生にとっては少し難しかったかもしれません。文字式が少し複雑で見にくかったかもしれませんが、このくらいは受験で頻出で今回の問題は難易度としては、簡単なレベルです。確率は、難しい科目ですが、入試でも出やすい単元です。しっかりと勉強をしておいてください。

【無料で読めるメルマガの紹介】

数学って難しいですよね。でも、数学って「このときはこうする」というルールがあっ

てそれをひとつずつ覚えていけば誰でもできるようになります。

「今までの苦労はなんだったの？」と思えるほど、簡単にできるようになりますよ。

「４浪しているのにセンター６割」
→「わずか入会８か月後に島根大学医学部医学科に合格！」

本人いわく「悲惨な成績」で限りなく学年で下位
→「ぐんぐん成績をあげて筑波大学理工学群現役合格！」

「問題が少し難しくなるととたんに解けなくなる」
→「解き方のルールを覚えて難問も解けるようになり東北大学歯学部に合格！」

多くの受験生が数学の成績をあげた秘訣を紹介します。

以下の無料メルマガの登録をしてください。無料ですし、いつでも解除できるので登録しないと損ですよ。以下をクリックしてください。

ルールを覚えれば誰でもできる！
あなたの数学の偏差値を７０にするメルマガ

https://hmg-gen.com/merutou.html

ツイッターやっています
https://twitter.com/hmggen

高校数学の勉強法
https://www.hmg-gen.com/

医学部数学の勉強法
https://www.ouen-math.com/

感想はこちらまでメールをください（何か言ってもらえると嬉しいです）
magdai@hmg-gen.com

河見賢司